RECHERCHES

SUR LES

FONCTIONS SPHÉRIQUES

PAR

DR. NIELS NIELSEN,

DOCENT DE MATHÉMATIQUES PURES À L'UNIVERSITÉ DE COPENHAGUE

D. KGL. DANSKE VIDENSK. SELSK. SKRIFTER, 7. RÆKKE, NATURVIDENSK. OG MATHEM. AFD. II. 5

KØBENHAVN

BIANCO LUNOS BOGTRYKKERI

1906

Table des matières.

CHAPITRE IV.

Les séries neumanniennes.

Introduction.

La théorie des fonctions sphériques présente dans son développement historique de nombreuses analogies avec celle des fonctions cylindriques.

En effet, l'introduction même de ces deux groupes de fonctions dans l'Analyse était déjà entièrement analogue, c'est-à-dire que des cas particuliers de ces deux catégories de fonctions se sont présentés comme coefficients dans des développements essentiels en Astronomie théorique et en Mécanique analytique.

Or, une telle introduction non analytique des fonctions susdites, ne pénétrant pas jusqu'aux propriétés fondamentales, a été fatale au développement d'une théorie systématique et générale de ces sortes de fonctions, et cela pendant une centaine d'années environ.

En effet, Legendre[1]) a introduit, pour étudier l'attraction des sphéroïdes, la *fonction sphérique* ordinaire de première espèce, souvent nommée *polynome de Legendre*, savoir notre fonction $P^{\frac{1}{2},n}(x)$, n désignant un positif entier. La distribution de la chaleur ou de l'électricité dans un anneau a conduit C. Neumann[2]) à la *fonction anulaire*, savoir notre fonction $P^{\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}}(x)$, n désignant un entier non négatif, tandis que F.-G. Mehler[3]) a introduit la *fonction conique*, savoir notre fonction $P^{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}+\nu i}(x)$, ν étant une quantité finie quelconque.

Cependant il a été nécessaire d'introduire les trois fonctions complémentaires, savoir les fonctions $Q^{\nu,\rho}(x)$ correspondantes et encore les six *fonctions adjointes*.

Or, toutes les fonctions ainsi obtenues possédant un grand nombre de propriétés communes, il a été nécessaire de développer *six* ou bien *douze* fois de telles propriétés.

On voit que l'histoire des fonctions cylindriques présente une phase analogue, parce qu'il a été nécessaire de développer la plupart des propriétés de $J^{\nu}(x)$ encore une fois pour la fonction de seconde espèce $Y^{n}(x)$.

Dans mon *Traité des fonctions cylindriques*[4]) j'ai développé une théorie systématique de ces transcendantes, ce qui nous épargne le double développement sus-

[1]) Mém. prés. à l'Acad. par divers savants t. 10; Paris 1785.

[2]) Theorie der Elektrizitäts- und Wärmeverteilung in einem Ringe; Halle 1864.

[3]) Journal für Mathematik, t. 68, p. 154; 1868.

[4]) Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen; Leipzig. Teubner, 1904.

dit; j'ai pris pour point de départ deux équations fonctionnelles qui définissent complètement les fonctions en question.

Or, l'analogie analytique entre les fonctions sphériques et cylindriques (le dernier de ces groupes de fonctions peut être considéré comme des valeurs limites du premier) engage beaucoup à essayer de développer une théorie analogue des fonctions sphériques.

Dans deux Notes que *l'Académie des Sciences de France* m'a fait l'honneur de publier dans ses *Comptes rendus*[1]) j'ai indiqué les fondements d'une telle théorie systématique.

Dans le présent Mémoire je commence par développer plus amplement les idées indiquées dans les Notes susdites, puis j'étudie assez en détail les propriétés fondamentales des fonctions ainsi obtenues: je les appelle *fonctions métasphériques,* désignation qui résulte des remarques critiques de mon ami M. A. WANGERIN[2]), de Halle.

L'avantage de cette méthode saute aux yeux.

En effet, dans le § 5 je démontre qu'il suffit d'étudier une seule fonction métasphérique, savoir la fonction $Q^{\nu,\rho}(x)$. Cette fonction générale, qui donne comme des cas particuliers les fonctions sphériques, annulaires et coniques, possède cependant un grand nombre des propriétés connues de ces fonctions particulières.

Or, les propriétés de $Q^{\nu,\rho}(x)$ étant trouvées, on en déduit les propriétés correspondantes des fonctions susdites plus particulières en cherchant simplement la vraie valeur des expressions indéterminées, précisément comme je l'ai fait pour $Y^n(x)$ dans mon Traité signalé ci-dessus.

Les deux premiers chapitres du présent Mémoire sont consacrés à l'étude de $Q^{\nu,\rho}(x)$; dans le troisième chapitre je considère le cas particulier où ρ est égal à un entier non négatif. Un grand nombre des résultats particuliers ainsi obtenus sont connus, mais déduits d'une manière moins systématique et moins générale.

Dans le quatrième et dernier chapitre j'étudie les séries *neumanniennes* de fonctions $P^{\nu,n}(x)$, séries que j'ai appliquées dans deux Mémoires dont le premier vient de paraître tandis que le dernier paraîtra dans les *Annaes scientificos da Academia Polytechnica do Porto.*

Du reste, je me réserve de revenir, dans des recherches ultérieures, aux fonctions que je viens d'introduire ici.

[1]) 30 mai et 20 juin 1904.

[2]) Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, t. II, p. 732; 1904.

Copenhague, le 7 octobre 1905.

Niels Nielsen.

CHAPITRE I.

Propriétés fondamentales des fonctions métasphériques.

§ 1. Définitions générales de $K^{\nu,\rho}(x)$.

Nous désignons comme fonction *métasphérique* de l'argument x, du paramètre ν et de l'indice ρ, une fonction $K^{\nu,\rho}(x)$ qui est assujettie à satisfaire à ces deux équations fonctionnelles

$$(1-x^2)D_x K^{\nu,\rho}(x) = (\rho+2\nu)x K^{\nu,\rho}(x) - (\rho+1)K^{\nu,\rho+1}(x), \tag{1}$$

$$2(\rho+\nu)x K^{\nu,\rho}(x) = (\rho+1)K^{\nu,\rho+1}(x) + (\rho+2\nu-1)K^{\nu,\rho-1}(x), \tag{2}$$

mais qui est du reste aussi arbitraire que ces conditions le permettent.

Ajoutons maintenant les deux formules (1), (2), nous obtenons:

$$(1-x^2)D_x K^{\nu,\rho}(x) = -\rho x K^{\nu,\rho}(x) + (\rho+2\nu-1)K^{\nu,\rho-1}(x), \tag{3}$$

équation qui peut remplacer une des formules originelles (1) ou (2) dans la définition de $K^{\nu,\rho}(x)$.

Pour résoudre les équations fonctionnelles susdites, cherchons tout d'abord les solutions qui sont des *fonctions analytiques de l'argument x*. A cet effet, différentions par rapport à x l'équation (1), puis éliminons, entre (1) et la formule ainsi obtenue, les deux fonctions $K^{\nu,\rho+1}(x)$ et $D_x K^{\nu,\rho+1}(x)$, ce qui s'effectuera sans peine à l'aide de la formule obtenue de (3) en y mettant $\rho+1$ au lieu de ρ.

Ces réductions faites, nous trouvons une équation différentielle, linéaire et homogène du second ordre, savoir:

$$(1-x^2)y^{(2)} - (1+2\nu)x y^{(1)} + \rho(\rho+2\nu)y = 0, \tag{4}$$

où y désigne la fonction métasphérique particulière qui est supposée fonction *analytique* de x; nous verrons du reste que l'équation (4) n'est autre chose qu'un cas particulier de l'équation de Gauss.

Appliquons maintenant l'identité évidente

$$D_x(1-x^2)^{\nu+\frac{1}{2}} = -(1+2\nu)(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cdot x$$

puis multiplions par $(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}$ les deux membres de (4), il résulte:

$$D_x[(1-x^2)^{\nu+\frac{1}{2}} \cdot y^{(1)}] = -\rho(\rho+2\nu)(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cdot y. \tag{5}$$

Or, il est évident que la forme de notre équation différentielle (4) montrera que son intégrale complète est holomorphe dans toute l'étendue du plan des x à l'exception des trois points isolés $x=+1$, $x=-1$, $x=\infty$; c'est-à-dire que nous avons à étudier séparément les deux cas différents qui correspondent à $|x|<1$ et $|x|>1$.

Quant au dernier de ces deux cas, introduisons comme variable indépendante $\frac{1}{x}$ au lieu de x, puis appliquons les identités élementaires

$$\left.\begin{aligned} f^{(1)}(z)_{z=\frac{1}{x}} &= -x^2 D_x f\left(\frac{1}{x}\right) \\ f^{(2)}(z)_{z=\frac{1}{x}} &= x^4 D_x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) + 2x^3 D_x f\left(\frac{1}{x}\right), \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

il résulte, en vertu de (4), cette équation nouvelle:

$$x^2(1-x^2)z^{(2)} + (1-2\nu-2x^2)xz^{(1)} - \rho(\rho+2\nu)z = 0\,, \tag{7}$$

où nous avons posé pour abréger $z = K^{\nu,\rho}\left(\frac{1}{x}\right)$.

§ 2. Les quatre fonctions particulières M, N, P et Q.

L'intégrale complète de l'équation différentielle § 1, (4) peut être trouvée en transformant l'équation générale de Gauss, dont l'intégrale complète s'exprime à l'aide de deux fonctions hypergéométriques. Or, il est aussi facile d'appliquer la méthode ordinaire pour intégrer, à l'aide des séries de puissances, une équation différentielle linéaire.

A cet effet, introduisons dans § 1, (4) une série de la forme

$$y = \sum_{s=0}^{s=\infty} c_{2s} \cdot x^{k+2s}\,, \tag{1}$$

nous aurons pour la détermination des coefficients c_{2s} une formule récursive, comme voici:

$$(2s+k)(2s+k-1)\,c_{2s} = (2s+k-\rho-2)(2s+k+\rho+2\nu-2)\,c_{2s-2}\,, \tag{2}$$

tandis que le premier exposant inconnu k se détermine à l'aide de l'équation déterminante

$$k(k-1) = 0\,,$$

ce qui donnera ces deux valeurs fixes et par conséquent toujours *différentes*:

$$k = 0\,,\quad k = 1\,, \tag{3}$$

d'où, en vertu de (1), (2), ces deux intégrales particulières de § 1, (4)

$$y_1 = F\left(-\frac{\rho}{2}, \nu+\frac{\rho}{2}, \frac{1}{2}, x^2\right) = F_1^\rho(x) \tag{4}$$

$$y_2 = x \cdot F\left(\frac{1-\rho}{2}, \nu+\frac{1+\rho}{2}, \frac{3}{2}, x^2\right) = G_1^\rho(x)\,, \tag{5}$$

où F désigne la série hypergéométrique ordinaire.

Il est évident que les deux intégrales particulières (4), (5), applicables pour $|x| < 1$, sont toujours *indépendantes* entre elles.

Introduisons ensuite dans § 1, (7) la série de puissances (1), le même procédé donnera, si nous posons $\frac{1}{x}$ au lieu de x, les deux autres intégrales particulières de notre équation différentielle

$$y_3 = x^{\rho} \cdot F\left(\frac{1-\rho}{2}, -\frac{\rho}{2}, 1-\nu-\rho, \frac{1}{x^2}\right) = F_2^{\rho}(x) \tag{6}$$

$$y_4 = x^{-\rho-2\nu} \cdot F\left(\nu+\frac{\rho}{2}, \nu+\frac{\rho+1}{2}, 1+\nu+\rho, \frac{1}{x^2}\right) = G_2^{\rho}(x) \tag{7}$$

qui sont applicables pour $|x| > 1$.

Il est évident que les intégrales (6), (7) sont *indépendantes* entre elles, le cas particulier $\rho = -\nu$ excepté.

Cela posé, il nous reste encore à déterminer des combinaisons linéaires et homogènes des deux groupes d'intégrales particulières que nous venons de trouver, de sorte que les fonctions ainsi obtenues satisfassent aux équations fonctionnelles § 1, (1), (3).

Considérons d'abord le cas $|x| < 1$, il faut admettre

$$K^{\nu,\rho}(x) = A(\nu,\rho)\, F_1^{\rho}(x) + B(\nu,\rho)\, G_1^{\rho}(x), \tag{8}$$

où les coefficients A et B doivent être indépendants de x tous les deux, parce que la fonction métasphérique qui est fonction *analytique* de x doit satisfaire à l'équation différentielle § 1, (4).

Introduisons maintenant dans les équations fonctionnelles susdites la fonction (8), puis appliquons ces deux identités:

$$(1-x^2)\, D_x F_1^{\rho}(x) = (\rho+2\nu)\, x\, F_1^{\rho}(x) - (\rho+1)(\rho+2\nu)\, G_1^{\rho+2}(x),$$

$$(1-x^2)\, D_x G_1^{\rho}(x) = (\rho+2\nu)\, x\, G_1^{\rho}(x) + F_1^{\rho+1}(x),$$

tirées directement des définitions; il résulte que les deux fonctions A et B doivent satisfaire aux conditions

$$(\rho+2\nu)\, A(\nu,\rho) = B(\nu,\rho+1),$$

$$B(\nu,\rho) = -(\rho+1)\, A(\nu,\rho+1),$$

ce qui donnera immédiatement:

$$(\rho+2\nu)\, A(\nu,\rho) = -(\rho+2)\, A(\nu,\rho+2),$$

d'où finalement:

$$A(\nu,\rho) = \frac{\Gamma\left(\frac{\rho}{2}+\nu\right)}{\Gamma\left(\frac{\rho}{2}+1\right)} \cdot \omega(\nu,\rho)$$

$$B(\nu,\rho) = -\frac{2\Gamma\left(\nu+\frac{\rho+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\rho+1}{2}\right)} \cdot \omega(\nu,\rho+1),$$

où $\omega(\nu,\rho)$ désigne une fonction de ν et ρ, assujettie à satisfaire à la condition de périodicité

$$\omega(\nu,\rho+2) = -\omega(\nu,\rho),$$

mais étant du reste complètement arbitraire.

Cela posé, il est évident que ces deux fonctions particulières

$$M^{\nu,\rho}(x) = \frac{\Gamma\left(\nu+\frac{\rho}{2}\right)\cos\frac{\rho\pi}{2}}{\Gamma(\nu)\,\Gamma\left(\frac{\rho}{2}+1\right)}\cdot y_1 + \frac{2\Gamma\left(\nu+\frac{\rho+1}{2}\right)\sin\frac{\rho\pi}{2}}{\Gamma(\nu)\,\Gamma\left(\frac{\rho+1}{2}\right)}\cdot y_2 \tag{9}$$

$$N^{\nu,\rho}(x) = -\frac{2^{2\nu-2}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{\rho}{2}\right)\sin\frac{\pi\rho}{2}}{\Gamma\left(\frac{\rho}{2}+1\right)}\cdot y_1 + \frac{2^{2\nu-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\rho+1}{2}+\nu\right)\cos\frac{\rho\pi}{2}}{\Gamma\left(\frac{\rho+1}{2}\right)}\cdot y_2\,, \tag{10}$$

définies toutes les deux, pourvu que $|x| < 1$, sont des fonctions métasphériques de l'argument x, du paramètre ν et de l'indice ρ, et elles sont certainement parmi les plus simples de ces sortes de fonctions.

Dans le second cas, où $|x| > 1$, nous obtenons de la même manière, en appliquant ces deux identités

$$(1-x^2)\,D_x\,F_2^{\rho}(x) = (\rho+2\nu)\,x\,F_2^{\rho}(x) - 2(\nu+\rho)\,F_2^{\rho+1}(x)$$

$$(1-x^2)\,D_x\,G_2^{\rho}(x) = (\rho+2\nu)\,x\,G_2^{\rho}(x) - \frac{(\rho+1)\left(\nu+\frac{\rho}{2}\right)}{\nu+\rho+1}\cdot G_2^{\rho+1}(x)\,,$$

faciles à vérifier, ces deux autres fonctions métasphériques beaucoup plus simples que les deux précédentes:

$$P^{\nu,\rho}(x) = \frac{\Gamma(\nu+\rho)(2x)^{\rho}}{\Gamma(\nu)\,\Gamma(\rho+1)}\cdot F\left(\frac{1-\rho}{2},\ -\frac{\rho}{2},\ 1-\nu-\rho,\ \frac{1}{x^2}\right) \tag{11}$$

$$Q^{\nu,\rho}(x) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho+2\nu)\,x^{-\rho-2\nu}}{2^{\rho+1}\cdot\Gamma(\nu+\rho+1)}\cdot F\left(\nu+\frac{\rho+1}{2},\ \nu+\frac{\rho}{2},\ 1+\nu+\rho,\ \frac{1}{x^2}\right). \tag{12}$$

Les coefficients que nous venons d'introduire dans nos quatre fonctions métasphériques particulières sont choisis, de sorte que tous les coefficients des fonctions susdites qui correspondent à $\nu = \frac{1}{2}$ et à ρ égal à un entier non négatif deviennent des nombres *rationnels*.

On voit du reste que nos quatre fonctions en question deviendront illusoires pour des valeurs particulières du paramètre et de l'indice. Dans ces cas il faut modifier les définitions susdites en multipliant par des fonctions convenables de ν et ρ, périodiques par rapport à ρ en ayant la période additive $+1$.

Or, de tels cas particuliers ne présentent aucun intérêt ici, où il s'agit de fonder une théorie générale et systématique des fonctions sphériques et des fonctions analogues.

§ 3. Le déterminant fonctionnel.

Dans ce qui suit nous avons à appliquer le déterminant fonctionnel formé des fonctions M et N ou P et Q; désignons par $K_1^{\nu,\rho}(x)$ et $K_2^{\nu,\rho}(x)$ un groupe de ces intégrales de § 1, (4), puis posons:

$$\Delta_1^{\nu,\rho}(x) = \begin{vmatrix} K_1^{\nu,\rho}(x) & D_x K_1^{\nu,\rho}(x) \\ K_2^{\nu,\rho}(x) & D_x K_2^{\nu,\rho}(x) \end{vmatrix} \tag{1}$$

une formule générale très connue donnera, en vertu de § 1, (4), pour notre déterminant cette expression[1])

$$\Delta^{\nu,\rho}(x) = C \cdot e^{\int \frac{(1+2\nu)x}{1-x^2}dx} = C \cdot (1-x^2)^{-\nu-\frac{1}{2}}, \tag{2}$$

où C désigne un facteur indépendant de x.

Cela posé, éliminons, à l'aide de § 1, (1), les dérivées de K_1 et K_2 dans Δ, puis mettons pour abréger:

$$D^{\nu,\rho}(x) = \begin{vmatrix} K_1^{\nu,\rho}(x) & K_1^{\nu,\rho+1}(x) \\ K_2^{\nu,\rho}(x) & K_2^{\nu,\rho+1}(x) \end{vmatrix}; \tag{3}$$

il résulte cette relation simple:

$$D^{\nu,\rho}(x) = \frac{x^2-1}{\rho+1} \cdot \Delta^{\nu,\rho}(x). \tag{4}$$

Déterminons maintenant le coefficient C qui figure dans (2). Posons d'abord:

$$K_1^{\nu,\rho}(x) = M^{\nu,\rho}(x), \quad K_2^{\nu,\rho}(x) = N^{\nu,\rho}(x),$$

puis mettons dans (2) $x = 0$, la formule

$$\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(2\omega) = \Gamma(\omega)\,\Gamma\!\left(\omega + \frac{1}{2}\right) \cdot 2^{2\omega-1} \tag{5}$$

donnera immédiatement la formule cherchée:

$$\begin{vmatrix} M^{\nu,\rho}(x) & D_x M^{\nu,\rho}(x) \\ N^{\nu,\rho}(x) & D_x N^{\nu,\rho}(x) \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho+2\nu)}{\Gamma(\nu)\,\Gamma(\rho+1)} \cdot (1-x^2)^{-\frac{1}{2}-\nu}, \tag{6}$$

d'où, en vertu de (4), la formule analogue:

$$\begin{vmatrix} M^{\nu,\rho}(x) & M^{\nu,\rho+1}(x) \\ N^{\nu,\rho}(x) & N^{\nu,\rho+1}(x) \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho+2\nu)}{\Gamma(\nu)\,\Gamma(\rho+2)}(1-x^2)^{\frac{1}{2}-\nu}. \tag{7}$$

Posons ensuite:

$$K_1^{\nu,\rho}(x) = P^{\nu,\rho}(x), \quad K_2^{\nu,\rho}(x) = Q^{\nu,\rho}(x),$$

puis mettons dans ce cas

$$\Delta^{\nu,\rho}(x) = C_1 \cdot (x^2-1)^{-\frac{1}{2}-\nu}, \tag{8}$$

la valeur de C_1 se détermine en multipliant par $x^{2\nu+1}$ les deux membres de (8) et en mettant ensuite $|x| = \infty$, ce qui donnera:

$$\begin{vmatrix} P^{\nu,\rho}(x) & D_x P^{\nu,\rho}(x) \\ Q^{\nu,\rho}(x) & D_x Q^{\nu,\rho}(x) \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho+2\nu)}{\Gamma(\nu)\,\Gamma(\rho+1)} \cdot (x^2-1)^{-\frac{1}{2}-\nu}, \tag{9}$$

[1]) L. Fuchs dans le Jounnal de Crelle t. 66.

d'où, en vertu de (4), la formule analogue:

$$\begin{vmatrix} P^{\nu,\rho}(x) & P^{\nu,\rho+1}(x) \\ Q^{\nu,\rho}(x) & Q^{\nu,\rho+1}(x) \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho+2\nu)}{\Gamma(\nu)\,\Gamma(\rho+2)} \cdot (x^2-1)^{\frac{1}{2}-\nu}. \tag{10}$$

§ 4. La fonction métasphérique la plus générale.

Les résultats développés dans le paragraphe précédent nous permettent de déterminer facilement la fonction métasphérique la plus générale.

A cet effet, remarquons que l'équation § 1, (2) est, par rapport à l'indice ρ, une équation aux différences finies, linéaire et homogène du second ordre, puis désignons par K_1 et K_2 les deux fonctions M et N ou P et Q, selon que $|x| \lesseqgtr 1$, nous savons que la fonction métasphérique la plus générale de l'argument x, du paramètre ν et de l'indice ρ se présente toujours sous cette forme

$$K^{\nu,\rho}(x) = \mathfrak{A}^{\nu,\rho}(x)\,K_1^{\nu,\rho}(x) + \mathfrak{B}^{\nu,\rho}(x)\,K_2^{\nu,\rho}(x), \tag{1}$$

où les deux coefficients $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ doivent satisfaire à la condition de périodicité

$$\mathfrak{A}^{\nu,\rho+1}(x) = \mathfrak{A}^{\nu,\rho}(x), \quad \mathfrak{B}^{\nu,\rho+1}(x) = \mathfrak{B}^{\nu,\rho}(x). \tag{2}$$

Introduisons maintenant dans § 1, (1) la fonction $K^{\nu,\rho}(x)$ ainsi définie, puis remarquons que K_1 et K_2 sont des solutions de cette équation; nous obtenons la condition, nécessaire et suffisante à la fois, pour que K satisfasse à l'équation fonctionnelle susdite, savoir:

$$K_1^{\nu,\rho}(x)\,D_x\mathfrak{A}^{\nu,\rho}(x) + K_2^{\nu,\rho}(x)\,D_x\mathfrak{B}^{\nu,\rho}(x) = 0. \tag{3}$$

Supposons ensuite que les coefficients $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ ne soient pas indépendants de x tous les deux, l'équation (3) se présente aussi sous cette autre forme:

$$\frac{K_1^{\nu,\rho}(x)}{K_2^{\nu,\rho}(x)} = -\frac{D_x\mathfrak{B}^{\nu,\rho}(x)}{D_x\mathfrak{A}^{\nu,\rho}(x)}; \tag{4}$$

c'est-à-dire que le premier membre de (4) doit être une fonction périodique de ρ en ayant la période additive $+1$, ce qui est impossible, parce que la formule § 3, (3) donnera sans peine:

$$\frac{K_1^{\nu,\rho}(x)}{K_2^{\nu,\rho}(x)} = \frac{K_1^{\nu,\rho+1}(x)}{K_2^{\nu,\rho+1}(x)} + \frac{D^{\nu,\rho}(x)}{K_2^{\nu,\rho}(x)\,K_2^{\nu,\rho+1}(x)}.$$

Cela posé, il est évident que les fonctions $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ doivent nécessairement être indépendantes de x toutes les deux, d'où ce théorème fondamental:

La fonction métasphérique la plus générale de l'argument x, du paramètre ν et de l'indice ρ se présente sous cette forme:

$$K^{\nu,\rho}(x) = \mathfrak{A}(\nu,\rho)\,K_1^{\nu,\rho}(x) + \mathfrak{B}(\nu,\rho)\,K_2^{\nu,\rho}(x), \tag{5}$$

où K_1 et K_2 désignent les fonctions particulières M et N ou P et Q, selon que $|x| \lesseqgtr 1$, tandis que $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ sont des fonctions de ν et ρ, assujetties à satisfaire seulement à la condition de périodicité

$$\mathfrak{A}(\nu, \rho+1) = \mathfrak{A}(\nu, \rho), \quad \mathfrak{B}(\nu, \rho+1) = \mathfrak{B}(\nu, \rho), \tag{6}$$

mais étant du reste complètement arbitraires.

La formule (5) donnera immédiatement ce corollaire du théorème précédent:

La fonction métasphérique la plus générale est une fonction analytique de son argument, et intégrale de l'équation différentielle § 1, (4).

La même formule (5) montrera du reste que la fonction métasphérique générale ne présente aucun intérêt particulier, sauf de réunir dans une seule fonction les quatre fonctions particulières introduites dans le § 2.

Considérons encore cette autre fonction métasphérique:

$$L^{\nu,\rho}(x) = \mathfrak{A}_1(\nu, \rho) K_1{}^{\nu,\rho}(x) + \mathfrak{B}_1(\nu, \rho) K_2{}^{\nu,\rho}(x), \tag{7}$$

le théorème sur la multiplication de deux déterminants donnera immédiatement:

$$\begin{vmatrix} K^{\nu,\rho}(x) & D_x K^{\nu,\rho}(x) \\ L^{\nu,\rho}(x) & D_x L^{\nu,\rho}(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathfrak{A}(\nu, \rho) & \mathfrak{B}(\nu, \rho) \\ \mathfrak{A}_1(\nu, \rho) & \mathfrak{B}_1(\nu, \rho) \end{vmatrix} \cdot \Delta^{\nu,\rho}(x) \tag{8}$$

$$\begin{vmatrix} K^{\nu,\rho}(x) & K^{\nu,\rho+1}(x) \\ L^{\nu,\rho}(x) & L^{\nu,\rho+1}(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathfrak{A}(\nu, \rho) & \mathfrak{B}(\nu, \rho) \\ \mathfrak{A}_1(\nu, \rho) & \mathfrak{B}_1(\nu, \rho) \end{vmatrix} \cdot D^{\nu,\rho}(x), \tag{9}$$

où $\Delta^{\nu,\rho}(x)$ et $D^{\nu,\rho}(x)$ désignent les deux déterminants introduits dans le § 3.

§ 5. Les trois invariants d'une fonction métasphérique.

Les équations fonctionnelles du § 1 que nous avons prises comme définition d'une fonction métasphérique nous permettent de soumettre le paramètre et l'indice d'une telle fonction à certaines transformations simples qui nous conduiront toujours à des fonctions métasphériques, abstraction faite d'un simple facteur peut-être.

1°. Posons dans § 1, (1), (3) $-\rho-2\nu$ au lieu de ρ, nous retrouvons, dans l'ordre inverse, ces mêmes équations fonctionnelles, ce qui donnera une identité générale de la forme suivante:

$$K^{\nu,\,-\rho-2\nu}(x) = K_1{}^{\nu,\rho}(x), \tag{1}$$

d'où le théorème général:

La fonction $K^{\nu,\,-\rho-2\nu}(x)$ est une fonction métasphérique de l'argument x, du paramètre ν et de l'indice ρ.

Considérons les deux fonctions particulières P et Q, il résulte des identités de la forme suivante:

$$P^{\nu,\,-\rho-2\nu}(x) = a(\nu, \rho) P^{\nu,\rho}(x) + b(\nu, \rho) Q^{\nu,\rho}(x) \tag{2}$$

$$Q^{\nu,\,-\rho-2\nu}(x) = a_1(\nu, \rho) P^{\nu,\rho}(x) + b_1(\nu, \rho) Q^{\nu,\rho}(x), \tag{3}$$

où les quatre coefficients a et b sont des fonctions périodiques de ρ en ayant la période additive $+1$. Or, faisons tourner autour du point critique $x = \infty$ la variable x, nous aurons immédiatement

$$a(\nu, \rho) = b_1(\nu, \rho) = 0;$$

multiplions ensuite par $x^{\rho+2\nu}$ respectivement par $x^{-\rho}$ les deux membres des formules ainsi simplifiées (2) et (3), puis mettons $|x| = \infty$, nous aurons finalement ces deux formules élégantes:

$$P^{\nu, -\rho-2\nu}(x) = -\frac{2^{1-2\nu}\sin\pi(\rho+2\nu)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu)\sin\pi(\rho+\nu)} \cdot Q^{\nu,\rho}(x) \tag{4}$$

$$Q^{\nu, -\rho-2\nu}(x) = -\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu)\sin\pi(\rho+\nu)}{2^{1-2\nu}\sin\pi\rho} \cdot P^{\nu,\rho}(x), \tag{5}$$

tandis que les formules analogues pour M et N sont beaucoup plus compliquées.

Les formules (4), (5) sont très intéressantes parce qu'elles montrent que nous pouvons nous borner à étudier une seule des deux fonctions P et Q, et alors il faut préférer la fonction Q, parce qu'elle est la plus simple.

Cela posé, la définition § 2, (12) de $Q^{\nu,\rho}(x)$ donnera immédiatement cette proposition intéressante:

Toute série hypergéométrique, dans laquelle la différence des deux premiers éléments est égale à $\frac{1}{2}$, est une fonction métasphérique, abstraction faite d'un simple facteur.

Nous aurons en effet, en vertu de § 2, (12):

$$F\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha+1}{2}, \beta+1, \frac{1}{x^2}\right) = \frac{2^{2\beta-\alpha+1}\,\Gamma(\beta+1)\,x^{\alpha}}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(\alpha)} \cdot Q^{\alpha-\beta,\, 2\beta-\alpha}(x), \tag{6}$$

ou bien, en vertu de § 2, (11):

$$F\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha+1}{2}, \beta+1, \frac{1}{x^2}\right) = \frac{\Gamma(\alpha-\beta)\,\Gamma(1-\alpha)\,(2x)^{\alpha}}{\Gamma(-\beta)} \cdot P^{\alpha-\beta,\, -\alpha}(x). \tag{7}$$

La formule (6) nous permet de déduire immédiatement pour $Q^{\nu,\rho}(x)$ une expression intégrale très élégante.

A cet effet, prenons pour point de départ cette formule

$$\int_0^{\infty} J^{\nu}(tx)\,e^{-ty}\,t^{\rho}\,dt = \frac{x^{\nu}}{y^{\nu+\rho+1}} \cdot \frac{\Gamma(\nu+\rho+1)}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)} \cdot F\left(\frac{\nu+\rho+1}{2}, \frac{\nu+\rho+2}{2}, \nu+1, -\frac{x^2}{y^2}\right)$$

due à HANKEL[1]) et applicable pourvu que

$$\Re(\rho+\nu) > -1, \quad \Re(y \pm ix) > 0, \quad |x| < |y|;$$

une simple modification des significations donnera immédiatement la formule cherchée, savoir

$$Q^{\nu,\rho}(x) = \frac{2^{\nu}\sqrt{\pi}}{i^{\rho+\nu}} \cdot \int_0^{\infty} J^{\rho+\nu}(it)\,e^{-tx}\,t^{\nu-1}\,dt,$$

[1]) Voir mon Handbuch der Zylinderfunktionen, p. 185.

où il faut admettre à la fois

$$\Re(\rho+2\nu) > 0\,, \quad \Re(x) > 1\,;$$

dans le cas particulier où $\Re(x) = 1$ il faut supposer encore que $\Re(\nu) < \frac{1}{2}$.

2°. Posons dans l'équation différentielle § 1, (4) $1-\nu$ au lieu de ν et $-\rho-1$ au lieu de ρ, puis mettons dans l'équation ainsi obtenue

$$K^{1-\nu,\, -\rho-1}(x) = (1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cdot y\,,$$

nous aurons pour y précisément l'équation différentielle de la fonction métasphérique au paramètre ν et à l'indice ρ, d'où cet autre théorème général:

Désignons par $K^{\nu,\rho}(x)$ une fonction métasphérique de l'argument x, du paramètre ν et de l'indice ρ, nous aurons:

$$K^{1-\nu,\, -\rho-1}(x) = (1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}(a \cdot P^{\nu,\rho}(x) + b \cdot Q^{\nu,\rho}(x))\,, \tag{8}$$

où a et b désignent des fonctions convenables de ν et ρ.

Considérons par exemple les deux fonctions P et Q, le même procédé que dans 1° donnera ces deux autres formules fondamentales:

$$(x^2-1)^{\frac{1}{2}-\nu} \cdot P^{1-\nu,\, -\rho-1}(x) = \frac{\Gamma(1+\rho)\sin \pi\rho}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1-\nu)\,\Gamma(\rho+2\nu)\sin \pi(\rho+\nu)} \cdot Q^{\nu,\rho}(x) \tag{9}$$

$$(x^2-1)^{\frac{1}{2}-\nu} \cdot Q^{1-\nu,\, -\rho-1}(x) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu)\,\Gamma(1+\rho)\sin \pi(\rho+\nu)}{\Gamma(\rho+2\nu)\sin \pi(\rho+2\nu)} \cdot P^{\nu,\rho}(x)\,, \tag{10}$$

d'où, en combinant les deux groupes de formules (4) et (5), (9) et (10), ces deux identités singulières:

$$P^{1-\nu,\, \rho-1+2\nu}(x) = \frac{2^{2\nu-1}\,\Gamma(1+\rho)\,\Gamma(\nu)}{\Gamma(1-\nu)\,\Gamma(\rho+2\nu)} \cdot (x^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}} \cdot P^{\nu,\rho}(x) \tag{11}$$

$$Q^{1-\nu,\, \rho-1+2\nu}(x) = \frac{2^{1-2\nu}\,\Gamma(1+\rho)}{\Gamma(\rho+2\nu)} \cdot (x^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}} \cdot Q^{\nu,\rho}(x). \tag{12}$$

Pour $\nu = \frac{1}{2}$ ces deux formules se réduisent à des identités *formelles*.

3°. Différentions enfin par rapport à x l'equation différentielle obtenue pour $K^{\nu-1,\, \rho+1}(x)$, nous retrouvons pour $D_x K^{\nu-1,\, \rho+1}(x)$ précisément l'équation § 1, (4); remarquons ensuite que les définitions § 2, (11), (12) donnent immédiatement ces deux formules particulières:

$$D_x P^{\nu-1,\, \rho+1}(x) = (2\nu-2) \cdot P^{\nu,\rho}(x) \tag{13}$$

$$D_x Q^{\nu-1,\, \rho+1}(x) = -\frac{1}{2} \cdot Q^{\nu,\rho}(x)\,; \tag{14}$$

nous aurons ce troisième théorème général:

La dérivée $D_x K^{\nu-1,\, \rho+1}(x)$ est une fonction métasphérique du paramètre ν et de l'indice ρ.

Appliquons maintenant l'équation différentielle § 1, (5), nous aurons, en vertu de (13), (14), ces deux autres formules:

$$D_x[(1-x^2)^{\nu+\frac{1}{2}} \cdot P^{\nu+1,\,\rho-1}(x)] = -\frac{\rho(\rho+2\nu)}{2\nu}(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cdot P^{\nu,\rho}(x) \tag{15}$$

$$D_x[(1-x^2)^{\nu+\frac{1}{2}} \cdot Q^{\nu+1,\,\rho-1}(x)] = 2\rho(\rho+2\nu)(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cdot Q^{\nu,\rho}(x); \tag{16}$$

mettons ensuite dans (15), (16) $\nu+1$ au lieu de ν et $\rho-1$ au lieu de ρ, puis différentions par rapport à x et ainsi de suite, la conclusion ordinaire de $p-1$ à p donnera les formules plus générales:

$$D_x^p[(1-x^2)^{\nu+p-\frac{1}{2}} \cdot P^{\nu+p,\,\rho-p}(x)] = \frac{(-1)^p \Gamma(\rho+1)\Gamma(\nu)\Gamma(\rho+2\nu+p)}{2^p\Gamma(\rho-p+1)\Gamma(\nu+p)\Gamma(\rho+2\nu)} \cdot \frac{P^{\nu,\rho}(x)}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}-\nu}} \tag{17}$$

$$D_x^p[(1-x^2)^{\nu+p-\frac{1}{2}} \cdot Q^{\nu+p,\,\rho-p}(x)] = \frac{2^p\Gamma(\rho+1)\Gamma(\rho+2\nu+p)}{\Gamma(\rho+2\nu)\Gamma(\rho-p+1)} \cdot \frac{Q^{\nu,\rho}(x)}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}-\nu}}, \tag{18}$$

où p désigne un positif entier.

Il est évident que les formules (17), (18) se présentent sous cette autre forme aussi:

$$P^{\nu,\rho}(x) = \frac{(-1)^p\Gamma(\rho+p+1)\Gamma(\rho+2\nu)\Gamma(\nu-p)}{2^p\Gamma(\rho+1)\Gamma(\rho+2\nu-p)\Gamma(\nu)} \cdot \frac{D_x^{-p}[(1-x^2)^{\nu+p-\frac{1}{2}} \cdot P^{\nu-p,\,\rho+p}(x)]}{(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}} \tag{19}$$

$$Q^{\nu,\rho}(x) = \frac{2^p\Gamma(\rho+p+1)\Gamma(\rho+2\nu)}{\Gamma(\rho+2\nu-p)\Gamma(\rho+1)} \cdot \frac{D_x^{-p}[(1-x^2)^{\nu+p-\frac{1}{2}} \cdot Q^{\nu-p,\,\rho+p}(x)]}{(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}}, \tag{20}$$

où il faut déterminer convenablement les constantes d'intégration.

§ 6. Autres propriétés fondamentales de $K^{\nu,\rho}(x)$.

Il nous semble utile de réunir dans un paragraphe particulier les formules fondamentales qui contiennent des fonctions métasphériques aux paramètres ν et $\nu \pm 1$ et aux indices ρ et $\rho \pm 1$.

Étudions d'abord la variation de l'indice, nous aurons en premier lieu ces trois formules du § 1:

$$(1-x^2)D_x K^{\nu,\rho}(x) = (\rho+2\nu)xK^{\nu,\rho}(x) - (\rho+1)K^{\nu,\rho+1}(x) \tag{1}$$

$$(1-x^2)D_x K^{\nu,\rho}(x) = -\rho x K^{\nu,\rho}(x) + (\rho+2\nu-1)K^{\nu,\rho-1}(x) \tag{2}$$

$$2(\rho+\nu)xK^{\nu,\rho}(x) = (\rho+1)K^{\nu,\rho+1}(x) + (\rho+2\nu-1)K^{\nu,\rho-1}(x). \tag{3}$$

Différentions maintenant par rapport à x la formule (1), puis éliminons, à l'aide de § 1, (4), la fonction $D_x^2 K^{\nu,\rho}(x)$, un simple calcul donnera cette nouvelle formule fondamentale:

$$(\rho+2\nu)K^{\nu,\rho}(x) = D_x K^{\nu,\rho+1}(x) - xD_x K^{\nu,\rho}(x). \tag{4}$$

Différentions ensuite par rapport à x la formule (3), puis éliminons, à l'aide de (4), la fonction $D_x K^{\nu,\rho}(x)$, il résulte:

$$2(\rho+\nu)K^{\nu,\rho}(x) = D_x K^{\nu,\rho+1}(x) - D_x K^{\nu,\rho-1}(x), \tag{5}$$

d'où, en éliminant, à l'aide de (4), la fonction $K^{\nu,\rho}(x)$, cette autre formule:

$$2(\rho+\nu)\,x\,D_x K^{\nu,\rho}(x) = \rho\, D_x K^{\nu,\rho+1}(x) + (\rho+2\nu) D_x K^{\nu,\rho-1}(x). \tag{6}$$

Multiplions enfin par 2 les deux membres de (4), il résulte, en vertu de (5)

$$2\nu K^{\nu,\rho}(x) = D_x K^{\nu,\rho+1}(x) - 2x D_x K^{\nu,\rho}(x) + D_x K^{\nu,\rho-1}(x)\,, \tag{7}$$

tandis qu'une soustraction des deux formules (4) et (5) donnera immédiatement:

$$\rho K^{\nu,\rho}(x) = x D_x K^{\nu,\rho}(x) - D_x K^{\nu,\rho-1}(x). \tag{8}$$

Il est digne de remarque que les 8 formules que nous venons de développer sont applicables à une fonction métasphérique quelconque, ce qui n'a pas lieu pour les formules analogues concernant la variation du paramètre ν.

En effet, dans le § 5 nous avons déduit ces deux formules, formellement différentes:

$$D_x P^{\nu,\rho}(x) = 2\nu\,.\,P^{\nu+1,\rho-1}(x) \tag{9}$$

$$D_x Q^{\nu,\rho}(x) = -\frac{1}{2}\cdot Q^{\nu+1,\rho-1}(x). \tag{10}$$

Combinons maintenant la formule (9) avec (5), (7), (8), nous aurons respectivement:

$$(\rho+\nu) P^{\nu,\rho}(x) = \nu\left(P^{\nu+1,\rho}(x) - P^{\nu+1,\rho-2}(x)\right) \tag{11}$$

$$P^{\nu,\rho}(x) = P^{\nu+1,\rho}(x) - 2x P^{\nu+1,\rho-1}(x) + P^{\nu+1,\rho-2}(x) \tag{12}$$

$$(\rho+1) P^{\nu,\rho}(x) = 2\nu\left(x P^{\nu+1,\rho}(x) - P^{\nu+1,\rho-1}(x)\right) \tag{13}$$

tandis que la formule (10) donnera de la même manière ces formules analogues:

$$4(\rho+\nu) Q^{\nu,\rho}(x) = Q^{\nu+1,\rho-2}(x) - Q^{\nu+1,\rho}(x) \tag{14}$$

$$-4\nu Q^{\nu,\rho}(x) = Q^{\nu+1,\rho}(x) - 2x Q^{\nu+1,\rho-1}(x) + Q^{\nu+1,\rho-2}(x) \tag{15}$$

$$(\rho+1) Q^{\nu,\rho}(x) = Q^{\nu+1,\rho-1}(x) - x Q^{\nu+1,\rho}(x). \tag{16}$$

§ 7. Les valeurs numériques $P^{\nu,\rho}(\pm 1)$ et $Q^{\nu,\rho}(\pm 1)$.

Pour étudier les deux points critiques $x = \pm 1$ d'une fonction métasphérique nous avons tout d'abord à considérer les valeurs numériques $P^{\nu,\rho}(\pm 1)$ et $Q^{\nu,\rho}(\pm 1)$.

A cet effet, prenons pour point de départ la formule de Gauss:

$$F(\alpha,\beta,\gamma,1) = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)}\,,\quad \Re(\gamma-\alpha-\beta) > 0\,, \tag{1}$$

il résulte, en vertu de § 2, (11), (12), ces deux expressions:

$$P^{\nu,\rho}(1) = \frac{\Gamma(\nu+\rho)\,2^{\rho}}{\Gamma(\nu)\,\Gamma(\rho+1)}\cdot\frac{\Gamma(1-\nu-\rho)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}{\Gamma\left(1-\nu-\frac{\rho}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\rho}{2}-\nu\right)} \tag{2}$$

$$Q^{\nu,\rho}(1) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho+2\nu)}{2^{\rho+1}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}{\Gamma\left(\frac{\rho+1}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\rho}{2}\right)}, \tag{3}$$

ou bien, en appliquant des formules fondamentales très connues concernant la fonction gamma:

$$P^{\nu,\rho}(1) = \frac{\Gamma(\rho+2\nu)\sin\pi(\rho+2\nu)}{2\Gamma(2\nu)\,\Gamma(\rho+1)\cos\nu\pi\sin\pi(\rho+\nu)} \tag{4}$$

$$Q^{\nu,\rho}(1) = \frac{\Gamma(\rho+2\nu)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}{2\Gamma(\rho+1)}, \tag{5}$$

formules qui sont valables, pourvu que $\Re(\nu) < \frac{1}{2}$.

Dans les quatre dernières formules que nous venons de développer nous avons posé $1 = e^0$; mettons ensuite dans § 2, (11), (12) $-1 = e^{\pm\pi i}$, nous aurons respectivement:

$$P^{\nu,\rho}(-1) = e^{\pm\rho\pi i}\cdot P^{\nu,\rho}(x), \quad Q^{\nu,\rho}(-1) = e^{\mp(\rho+2\nu)\pi i}\cdot Q^{\nu,\rho}(1). \tag{6}$$

Quant à la portée des formules numériques ainsi obtenues, supposons $|x| > 1$, puis faisons converger x à ± 1 en suivant un chemin situé à l'extérieur du cercle $|x| = 1$ et n'étant pas tangent au cercle susdit dans les points $x = \pm 1$, le théorème d'Abel montre que les formules en question sont vraies dans ce cas.

Appliquons maintenant la formule intégrale très connue

$$\int_0^1 (1-t^2x^2)^{-\nu-\rho-\frac{1}{2}}(1-t)^\rho\, t^{\rho+2\nu-1}\,dt =$$

$$= \frac{\Gamma(\rho+1)\,\Gamma(2\nu+\rho)\sqrt{\pi}\,2^{-2\nu-2\rho}}{\Gamma(\nu+\rho+1)\,\Gamma\left(\nu+\rho+\frac{1}{2}\right)}\cdot F\left(\frac{\rho}{2}+\nu,\ \frac{\rho+1}{2}+\nu,\ \nu+\rho+1,\ x^2\right)$$

qui est valable, pourvu que $|x| < 1$, $\Re(\rho) > -1$, $\Re(\rho+2\nu) > 0$, puis mettons dans cette formule $1:x$ au lieu de x et $1:t$ au lieu de t, il résulte cette autre formule intégrale:

$$Q^{\nu,\rho}(x) = 2^{2\nu+\rho-1}\cdot\Gamma\left(\rho+\nu+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{x^{\rho+1}}{\Gamma(\rho+1)}\cdot\int_1^\infty (t^2x^2-1)^{-\nu-\rho-\frac{1}{2}}(t-1)^\rho\,dt, \tag{7}$$

qui est applicable pourvu que $\Re(\rho) > -1$, $\Re(\rho+2\nu) > 0$, tandis que x ne doit pas être égal à une quantité réelle, telle que $-1 < x < +1$; dans ce cas il faut admettre encore $\Re(\nu+\rho) < \frac{1}{2}$, tandis que l'hypothèse $x = \pm 1$ exige $\Re(\nu) < \frac{1}{2}$.

Cela posé, l'invariant § 5, (2) donnera la proposition suivante, essentielle pour ce qui suit:

Supposons $\Re(\nu) < \frac{1}{2}$, les cinq formules de (2) *à* (6) *sont valables si nous faisons converger, d'une façon quelconque (sans entourer les points critiques), la variable x aux points $x = \pm 1$.*

Or, ce résultat connu, il est très facile de démontrer cet autre théorème concernant la force d'infinité des deux points critiques susdits:

Supposons $\Re(\nu) > -\frac{1}{2}$, *tandis que* σ *désigne une quantité positive plus petite que l'unité, les deux fonctions*

$$(1-x^2)^{\nu+\sigma-\frac{1}{2}} \cdot P^{\nu,\rho}(x), \quad (1-x^2)^{\nu+\sigma-\frac{1}{2}} \cdot Q^{\nu,\rho}(x) \tag{8}$$

deviendront égales à zéro si nous faisons converger, d'une façon quelconque, la variable x *aux points critiques* $x = \pm 1$.

Dans le cas particulier où $\frac{1}{2} > \Re(\nu) > -\frac{1}{2}$, notre théorème susdit est une conséquence immédiate des formules (4), (5) et (6). Posons ensuite dans § 5, (17), (18) $\nu - p$ au lieu de p et $\rho + p$ au lieu de ρ, nous aurons:

$$(1-x^2)^p \cdot D_x^p[(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} P^{\nu,\rho}(x)] = A \cdot (1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cdot P^{\nu-p,\rho+p}(x) \tag{9}$$

$$(1-x^2)^p \cdot D_x^p[(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} Q^{\nu,\rho}(x)] = A_1 \cdot (1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cdot Q^{\nu-p,\rho+p}(x), \tag{10}$$

où A et A_1 sont des constantes par rapport à x, tandis que p est un positif entier quelconque.

Supposons maintenant $p + \frac{1}{2} > \Re(\nu) > -\frac{1}{2}$, nous savons que les seconds membres de (9) et (10) possèdent la propriété susdite, de sorte qu'un théorème fondamental très connue[1]) nous conduira immédiatement au but.

Il est évident que le théorème que nous venons de démontrer peut être donné aussi sous cette autre forme:

Supposons que la fonction $f(x)$ *soit intégrable de* $x = -1$ *à* $x = +1$ *et que les valeurs numériques* $f(\pm 1)$ *soient finies (ou infiniment grandes d'un ordre infiniment petit), les deux intégrales définis*

$$\int_{-1}^{+1} f(x) P^{\nu,\rho}(x)(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dx, \quad \int_{-1}^{+1} f(x) Q^{\nu,\rho}(x)(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dx \tag{11}$$

ont un sens, pourvu que $\Re(\nu) > -\frac{1}{2}$.

Mentionnons encore ici que les définitions mêmes des fonctions P et Q donnent immédiatement ces deux valeurs limites:

$$\lim_{|x|=\infty} (x^{-\rho} \cdot P^{\nu,\rho}(x)) = \frac{2^\rho \Gamma(\nu+\rho)}{\Gamma(\nu)\Gamma(\rho+1)} \tag{12}$$

$$\lim_{|x|=\infty} (x^{\rho+2\nu} \cdot Q^{\nu,\rho}(x)) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho+2\nu)}{2^{\rho+1} \cdot \Gamma(\nu+\rho+1)}. \tag{13}$$

§ 8. Nature analytique des trois points critiques $x = \pm 1$ et $x = \infty$.

Pour étudier la nature analytique des trois points critiques d'une fonction métasphérique nous avons tout d'abord à introduire quelques significations commodes.

A cet effet, supposons que $x = a$ soit un point critique isolé de la fonction $f(x)$, nous désignons par $\mathfrak{D}(a) f(x)$ et $\mathfrak{J}(a) f(x)$ ce que deviendra la fonction $f(x)$

[1]) U. Dini: Grundlagen für eine Theorie der Funktionen einer reellen veränderlichen Grösse, p. 104. Leipzig 1892.

si nous faisons tourner une seule fois, respectivement dans le sens direct et dans le sens indirect, la variable x autour du point critique $x = a$.

Ces significations adoptées, il est très facile d'étudier la singularité du point critique $x = \infty$.

En effet, prenons pour point de départ les définitions § 2, (11), (12), nous aurons immédiatement;

$$\mathfrak{D}(\infty)\, P^{\nu,\rho}(x) = e^{-2\rho\pi i} \cdot P^{\nu,\rho}(x)\,, \quad \mathfrak{D}(\infty)\, Q^{\nu,\rho}(x) = e^{(2\rho+4\nu)\pi i} \cdot Q^{\nu,\rho}(x) \tag{1}$$

$$\mathfrak{J}(\infty)\, P^{\nu,\rho}(x) = e^{2\rho\pi i} \cdot P^{\nu,\rho}(x)\,, \quad \mathfrak{J}(\infty)\, Q^{\nu,\rho}(x) = e^{-(2\rho+4\nu)\pi i} \cdot Q^{\nu,\rho}(x). \tag{2}$$

Quant aux deux autres points critiques $x = \pm 1$, supposons dabord $|x| < 1$, nous aurons, en vertu des formules du § 2, des identités de cette forme:

$$P^{\nu,\rho}(x) = A \cdot y_1 + Bx \cdot y_2 \tag{3}$$

$$Q^{\nu,\rho}(x) = A_1 \cdot y_1 + B_1 x \cdot y_2\,, \tag{4}$$

où nous avons posé pour abréger:

$$y_1 = F\left(-\frac{\rho}{2},\ \nu + \frac{\rho}{2},\ \frac{1}{2},\ x^2\right) \tag{5}$$

$$y_2 = F\left(\frac{1-\rho}{2},\ \nu + \frac{1+\rho}{2},\ \frac{3}{2},\ x^2\right), \tag{6}$$

tandis que les quatre coefficients A et B sont indépendants de x.

Pour déterminer maintenant les quatre coefficients susdits, mettons dans (3), (4) $x = 1 = e^0$ et $x = -1 = e^{\pm\pi i}$, nous aurons deux systèmes de valeurs différentes pour A, B, A_1 et B_1.

Posons pour abréger:

$$a = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu + \frac{\rho}{2}\right)}{2^{2-2\nu}\,\Gamma\left(\frac{\rho}{2} + 1\right)}\,, \qquad a_1 = \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{\rho}{2}\right) \cos\frac{\rho\pi}{2} \sin\pi\left(\nu + \frac{\rho}{2}\right)}{\Gamma(\nu)\,\Gamma\left(1 + \frac{\rho}{2}\right) \sin\pi(\nu+\rho)}$$

$$b = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu + \frac{\rho+1}{2}\right)}{2^{1-2\nu}\,\Gamma\left(\frac{\rho+1}{2}\right)}\,, \qquad b_1 = \frac{2\Gamma\left(\nu + \frac{\rho+1}{2}\right) \sin\frac{\rho\pi}{2} \cos\pi\left(\nu + \frac{\rho}{2}\right)}{\Gamma(\nu)\,\Gamma\left(\frac{1+\rho}{2}\right) \sin\pi(\nu+\rho)}\,,$$

puis désignons par P_1 et Q_1 les valeurs obtenues pour P et Q en allant du point T, situé à l'extérieur du cercle $|x| = 1$, au point U situé en l'intérieur du cercle susdit, en suivant un chemin continu TVU qui n'entoure aucun des points critiques $x = \pm 1$ et $x = \infty$. Nous déterminons le chemin, inconnu pour l'instant, TVU de sorte que les valeurs fonctionnelles P_1 et Q_1 correspondent à l'hypothèse $x = -1 = e^{+\pi i}$, ce qui donnera

$$e^{\left(\nu + \frac{\rho}{2}\right)\pi i} \cdot Q_1^{\nu,\rho}(x) = a y_1 - i b x y_2 \tag{7}$$

$$e^{-\frac{\rho\pi i}{2}} \cdot P_1^{\nu,\rho}(x) = a_1 y_1 - i b_1 x y_2. \tag{8}$$

Désignons ensuite par P_2 et Q_2 les valeurs de P et Q obtenues si nous allons de T à U en suivant un chemin continu TZU, tel que le chemin fermé et continu

$TVUZT$ entoure une seul fois le point critique $x = +1$, les valeurs P_2 et Q_2 correspondent à l'hypothèse $x = -1 = e^{-\pi i}$, de sorte que nous obtenons ces deux autres formules:

$$e^{-\left(\nu+\frac{\rho}{2}\right)\pi i} \cdot Q_2^{\nu,\rho}(x) = a y_1 + i b x y_2 \tag{9}$$

$$e^{\frac{\rho\pi i}{2}} \cdot P_2^{\nu,\rho}(x) = a_1 y_1 + i b_1 x y_2. \tag{10}$$

Cela posé, il est évident que les deux groupes de formules que nous venons de développer nous donnent le prolongement analytique de P et Q, pourvu que $|x| < 1$, mais inversement de y_1 et y_2 et par conséquent aussi pour M et N dans le cas où $|x| > 1$.

Prenons ensuite pour point de départ les deux formules (9) et (10), puis faisons parcourir le chemin UZT à la variable x, les deux valeurs fonctionnelles P_2 et Q_2 deviendront précisément P et Q, tandis que nous obtenons pour y_1 et y_2 les valeurs Y_1 et Y_2 qui s'expriment comme fonctions linéaires et homogènes de P et Q, à l'aide des équations ainsi obtenues de (9) et (10); nous aurons:

$$D \cdot Y_1 = b_1 Q - b P \tag{11}$$

$$D \cdot i x Y_2 = -a_1 Q + a P, \tag{12}$$

où nous avons posé pour abréger

$$D = a b_1 - a_1 b. \tag{13}$$

Revenons maintenant aux équations (7), (8), puis faisons-y parcourir le chemin UZT à la variable x, ce qui donnera pour P_1 et Q_1 les fonctions P et Q soumises à une seule des opérations $\mathfrak{D}(+1)$ ou $\mathfrak{J}(+1)$, tandis que y_1 et y_2 deviendront respectivement Y_1 et Y_2. Désignons par (P) et (Q) les valeurs fonctionnelles obtenues de P_1 et Q_1, il résulte, en vertu de (11), (12), deux identités de cette forme:

$$D \cdot (Q) = (a b_1 + a_1 b)\, e^{-(\rho+2\nu)\pi i} \cdot Q - 2ab\, e^{-\nu\pi i} \cdot P \tag{15}$$

$$D \cdot (P) = -(a b_1 + a_1 b)\, e^{\rho\pi i} \cdot P + 2 a_1 b_1\, e^{-\nu\pi i} \cdot Q. \tag{16}$$

Cela posé, introduisons dans le déterminant § 3, (10) les expressions (15), (16), nous aurons:

$$(Q) = \mathfrak{D}(+1)\, Q, \quad (P) = \mathfrak{D}(+1)\, P;$$

c'est-à-dire que le chemin fermé $TVUZT$ entoure dans le *sens direct* le point critique $x = +1$, ce qui donnera finalement:

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{D}(+1)\, Q^{\nu,\rho}(x) = \\ &= \left(2^{2\nu-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu)\, e^{-\nu\pi i} \cdot P^{\nu,\rho}(x) - e^{-(\rho+2\nu)\pi i} \cdot Q^{\nu,\rho}(x)\right) \cdot \frac{\sin\pi(\nu+\rho)}{\sin\nu\pi} \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{D}(+1)\, P^{\nu,\rho}(x) = \\ &= \left(e^{\rho\pi i} \cdot P^{\nu,\rho}(x) - \frac{\sin\pi\rho \cdot \sin\pi(\rho+2\nu)\, e^{-\nu\pi i}}{2^{2\nu-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu)\sin^2\pi(\nu+\rho)} \cdot Q^{\nu,\rho}(x)\right) \cdot \frac{\sin\pi(\nu+\rho)}{\sin\nu\pi} \end{aligned}\right\} . \tag{18}$$

Pour effectuer l'opération $\mathfrak{J}(+1)$ nous avons seulement à changer dans (17), (18) le signe de i, ce qui s'ensuit immédiatement des deux groupes de formules (7), (8) et (9), (10).

Quant au troisième point critique $x = -1$, nous aurons:

$$\mathfrak{D}(-1)\,Q^{\nu,\rho}(x) = \mathfrak{J}(\infty)\,\mathfrak{J}(+1)\,Q^{\nu,\rho}(x)$$

$$\mathfrak{J}(-1)\,Q^{\nu,\rho}(x) = \mathfrak{D}(\infty)\,\mathfrak{D}(+1)\,Q^{\nu,\rho}(x)$$

et deux formules analogues pour $P^{\nu,\rho}(x)$, d'où, en vertu de (1), (2) et (17), (18), ces deux autres formules:

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{D}(-1)\,Q^{\nu,\rho}(x) = \\ &= \left(2^{2\nu-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu)\,e^{-(2\rho+3\nu)\pi i}\,.\,P^{\nu,\rho}(x) - e^{-(\rho+2\nu)\pi i}\,Q^{\nu,\rho}(x)\right).\,\frac{\sin\pi(\nu+\rho)}{\sin\nu\pi} \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{D}(-1)\,P^{\nu,\rho}(x) = \\ &= \left(e^{\rho\pi i}\,.\,P^{\nu,\rho}(x) - \frac{\sin\pi\rho\cdot\sin\pi(\rho+2\nu)\,e^{(2\rho+\nu)\pi i}}{2^{2\nu-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu)\sin^2\pi(\nu+\rho)}\cdot Q^{\nu,\rho}(x)\right).\,\frac{\sin\pi(\nu+\rho)}{\sin\nu\pi} \end{aligned}\right\}, \tag{20}$$

tandis que l'opération $\mathfrak{J}(-1)$ nous conduira à des expressions obtenues des seconds membres de (19), (20) en y changeant le signe de i.

Il est évident que les formules que nous venons de développer dans les paragraphes 7 et 8 nous donnent la connaissance parfaite d'une fonction métasphérique considérée comme fonction de l'argument x.

Mettons encore dans (7), (8) ou dans (9), (10) $x = 0$, nous aurons ces autres valeurs numériques

$$P^{\nu,\rho}(0) = \frac{\Gamma\left(\nu+\frac{\rho}{2}\right)\cos\frac{\rho\pi}{2}\,\sin\pi\left(\nu+\frac{\rho}{2}\right)}{\Gamma(\nu)\,\Gamma\left(1+\frac{\rho}{2}\right)\sin\pi(\nu+\rho)}\,.\,e^{(2p+1)\frac{\rho\pi i}{2}} \tag{21}$$

$$Q^{\nu,\rho}(0) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{\rho}{2}\right)2^{2\nu-2}}{\Gamma\left(1+\frac{\rho}{2}\right)}\,.\,e^{-(2p+1)\left(\nu+\frac{\rho}{2}\right)\pi i}, \tag{22}$$

où p désigne un nombre entier quelconque.

Supposons $\nu = \frac{1}{2}$ et $\rho = n$, où n désigne un nombre entier, le point $x = \infty$ n'est pas un point de ramification de la fonction métasphérique correspondante. Dans ce cas particulier Heine[1]) fait uniforme la fonction Q à l'aide d'une coupure de $+1$ à -1, procédé qui n'est pas légitime comme l'a remarqué Stieltjes[2]).

[1]) Handbuch der Kugelfunktionen, t. I, p. 126; Berlin 1878.
[2]) Annales de Toulouse, t. 4; 1890.

§ 9. Les fonctions adjointes $P_\sigma^{\nu,\rho}(x)$ et $Q_\sigma^{\nu,\rho}(x)$.

Dans plusieurs applications des fonctions métasphériques nous avons besoin des *fonctions métasphériques adjointes*, savoir les fonctions

$$P_\sigma^{\nu,\rho}(x) = \frac{\Gamma(\nu+\sigma)\,\Gamma(\rho-\sigma+1)}{2^{\rho-\sigma}\cdot\Gamma(\rho+\nu)}\cdot(x^2-1)^{\frac{\sigma}{2}}\cdot P^{\nu+\sigma,\,\rho-\sigma}(x) \tag{1}$$

$$Q_\sigma^{\nu,\rho}(x) = \frac{2^{\rho-\sigma-1}\,\Gamma(\nu+\rho+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho+\sigma+2\nu)}\cdot(x^2-1)^{\frac{\sigma}{2}}\cdot Q^{\nu+\sigma,\,\rho-\sigma}(x) \tag{2}$$

ou bien sous la forme des séries hypergéométriques

$$P_\sigma^{\nu,\rho}(x) = x^{\rho-\sigma}\cdot(x^2-1)^{\frac{\sigma}{2}}\cdot F\left(\frac{\sigma-\rho}{2},\ \frac{\sigma-\rho+1}{2},\ 1-\rho-\nu,\ \frac{1}{x^2}\right) \tag{3}$$

$$Q_\sigma^{\nu,\rho}(x) = x^{-\rho-\sigma-2\nu}\cdot(x^2-1)^{\frac{\sigma}{2}}\cdot F\left(\nu+\frac{\rho-\sigma}{2},\ \nu+\frac{\rho-\sigma+1}{2},\ 1+\nu+\rho,\ \frac{1}{x^2}\right). \tag{4}$$

Or, les définitions (1), (2) adoptées, nous obtenons immédiatement, en vertu des formules invariantes § 5, (11), (12), ces deux identités analogues, mais beaucoup plus simples

$$P_{-\sigma}^{1-\nu,\,\rho-1+2\nu}(x) = (x^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}\cdot P_\sigma^{\nu,\rho}(x) \tag{5}$$

$$Q_{-\sigma}^{1-\nu,\,\rho-1+2\nu}(x) = (x^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}\cdot Q_\sigma^{\nu,\rho}(x)\,, \tag{6}$$

formules qui se présentent sous une forme très élégante dans le cas particuliers $\nu = \frac{1}{2}$.

Il est évident que nos deux fonctions adjointes doivent satisfaire à une équation différentielle linéaire et homogène du second ordre.

En effet, mettons dans § 1, (4) $\nu+\sigma$ et $\rho-\sigma$ au lieu de ν et ρ, il résulte

$$(1-x^2)\,y^{(2)}-(1+2\nu+2\sigma)\,x\,y^{(1)}+(\rho-\sigma)(\rho+\sigma+2\nu)\,y = 0\,,$$

d'où, en posant

$$y = (x^2-1)^{\frac{\sigma}{2}}\cdot z$$

et après un simple calcul l'équation différentielle cherchée

$$(1-x^2)\,z^{(2)}-(1+2\nu)\,x\,z^{(1)}+\left[\rho(\rho+2\nu)-\frac{\sigma(\sigma+2\nu-1)}{1-x^2}\right]\cdot z = 0 \tag{7}$$

qui admet comme intégrales particulières les deux fonctions adjointes P_σ et Q_σ.

Dans les deux cas particuliers $\sigma = 0$ et $\sigma = 1-2\nu$, notre équation (7) deviendra identique à § 1, (4), ce qui s'accorde bien pour $\sigma = 0$ avec les définitions (1), (2) elles-mêmes, et pour $\sigma = 1-2\nu$, avec les formules invariantes § 5, (11), (12).

Quant aux déterminants fonctionnels

$$\Delta_\sigma^{\nu,\rho}(x) = \begin{vmatrix} P_\sigma^{\nu,\rho}(x) & D_x P_\sigma^{\nu,\rho}(x) \\ Q_\sigma^{\nu,\rho}(x) & D_x Q_\sigma^{\nu,\rho}(x) \end{vmatrix},$$

un simple calcul donnera:

$$\Delta_\sigma^{\nu,\rho}(x) = \frac{\Gamma(\nu+\sigma)\,\Gamma(1+\rho-\sigma)\cdot(\nu+\rho)}{2\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(\rho+\sigma+2\nu)}\cdot(x^2-1)^{\sigma}\cdot\Delta^{\nu+\rho,\,\rho-\sigma}(x),$$

d'où, en vertu de § 3, (9):

$$\Delta_\sigma^{\nu,\rho}(x) = -\frac{\nu+\rho}{2}\cdot(x^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}. \tag{8}$$

Supposons maintenant que l'indice σ soit égal à un positif entier p, les définitions (1), (2) donnent immédiatement, en vertu de § 5, (9), (10):

$$P_p^{\nu,\rho}(x) = \frac{\Gamma(\nu)\,\Gamma(\rho-p+1)}{2^{\rho}\,\Gamma(\rho+\nu)}\cdot(x^2-1)^{\frac{p}{2}}\cdot D_x^p P^{\nu,\rho}(x) \tag{9}$$

$$Q_p^{\nu,\rho}(x) = \frac{(-1)^p\,2^{\rho+1}\,\Gamma(\nu+\rho+1)}{\sqrt{\pi}\;\Gamma(\rho+2\nu+p)}\cdot(x^2-1)^{\frac{p}{2}}\cdot D_x^p Q^{\nu,\rho}(x), \tag{10}$$

tandis que les formules § 5, (19), (20) donnent ces deux autres expressions:

$$P_p^{\nu,\rho}(x) = \frac{\Gamma(\rho+1)\,\Gamma(\nu)\,\Gamma(\rho+2\nu+p)}{2^{\rho}\,\Gamma(\nu+\rho)\,\Gamma(\rho+2\nu)}\cdot\frac{D_x^{-p}\left[(x^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}\cdot P^{\nu,\rho}(x)\right]}{(x^2-1)^{\nu+\frac{p-1}{2}}} \tag{11}$$

$$Q_p^{\nu,\rho}(x) = \frac{(-1)^p\,2^{\rho+1}\,\Gamma(\rho+1)\,\Gamma(\nu+\rho+1)}{\sqrt{\pi}\;\Gamma(\rho+2\nu)\,\Gamma(\rho-p+1)}\cdot\frac{D_x^{-p}\left[(x^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}\cdot Q^{\nu,\rho}(x)\right]}{(x^2-1)^{\nu+\frac{p-1}{2}}}, \tag{12}$$

ce qui s'accorde bien avec les identités (5), (6).

CHAPITRE II.

Transformations de l'argument de $K^{\nu,\rho}(x)$.

§ 10. Équation différentielle obtenue pour $x^\sigma\cdot K^{\nu,\rho}(x)$.

Dans plusieurs applications des fonctions métasphériques nous avons besoin de connaître l'équation différentielle tirée de § 1, (4) pour la fonction

$$z = x^\sigma\cdot K^{\nu,\rho}(x) = x^\sigma\cdot y. \tag{1}$$

A cet effet, écrivons sous cette forme

$$y = x^{-\sigma}\cdot z$$

la définition (1), il résulte immédiatement:

$$\left.\begin{aligned} x^\sigma\cdot y^{(1)} &= z^{(1)} - \frac{\sigma}{x}\cdot z \\ x^\sigma\cdot y^{(2)} &= z^{(2)} - \frac{2\sigma}{x}\cdot z^{(1)} + \frac{\sigma(\sigma+1)}{x^2}\cdot z, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

ce qui donnera, en vertu de § 1, (4) pour la fonction (1) cette équation différentielle:

$$x^2(1-x^2)z^{(2)} - [2\sigma + (1+2\nu-2\sigma)x^2]\,x\,z^{(1)} +$$
$$+ [\sigma(\sigma+1) + (\rho+\sigma)(\rho+2\nu-\sigma)x^2]\,z = 0. \tag{3}$$

Appliquons ensuite les formules différentielles § 1, (6), nous obtenons, en vertu de (3), cette autre équation:

$$x^2\,(x^2-1)\,y^{(2)} + [(2+2\sigma)\,x^2 + (2\nu-2\sigma-1)]\,x\,y^{(1)} +$$
$$+ [\sigma(\sigma+1)\,x^2 + (\rho+\sigma)(\rho+2\nu-\sigma)]\,y = 0 \tag{4}$$

qui admet comme intégrale la fonction

$$y = x^{-\sigma}\cdot K^{\nu,\rho}\left(\frac{1}{x}\right). \tag{5}$$

Nous avons à considérer séparément les trois cas particuliers suivants de nos équations (3) et (4):

1°. $\sigma = -1$; nous aurons pour les fonctions

$$y = \frac{1}{x}\cdot K^{\nu,\rho}(x), \quad z = x\cdot K^{\nu,\rho}\left(\frac{1}{x}\right) \tag{6}$$

ces deux équations différentielles:

$$x(1-x^2)\,y^{(2)} + (2+(3-2\nu)\,x^2)\,y^{(1)} + (\rho-1)(\rho+1+2\nu)\,xy = 0. \tag{7}$$

$$x^2(x^2-1)\,z^{(2)} + (1+2\nu)\,xz^{(1)} + (\rho-1)(\rho+1+2\nu)\,z = 0. \tag{8}$$

2°. $\sigma = -\rho$; nous verrons que les équations différentielles

$$x^2(1-x^2)\,y^{(2)} + (2\rho-(1+2\nu+2\rho)\,x^2)\,xy^{(1)} + \rho(\rho-1)\,y = 0 \tag{9}$$

$$x(x^2-1)\,z^{(2)} + [(2\nu+2\rho-1) + (2-2\rho)\,x^2]\,z^{(1)} + \rho(\rho-1)\,xz = 0 \tag{10}$$

admettent comme intégrales

$$y = x^{-\rho}\cdot K^{\nu,\rho}(x), \quad z = x^{\rho}\cdot K^{\nu,\rho}\left(\frac{1}{x}\right). \tag{11}$$

3°. $\sigma = \rho + 2\nu$; nous trouvons pour les fonctions

$$y = x^{\rho+2\nu}\cdot K^{\nu,\rho}(x), \quad z = x^{-\rho-2\nu}\cdot K^{\nu,\rho}\left(\frac{1}{x}\right) \tag{12}$$

ces équations différentielles:

$$x^2(1-x^2)\,y^{(2)} - (2\rho+4\nu+(1-2\nu-2\rho)\,x^2)\,x\cdot y^{(1)} + (\rho+2\nu)(\rho+2\nu+1)\,y = 0 \tag{13}$$

$$x^2(x^2-1)\,z^{(2)} + [(2+2\nu+2\rho)x^2 - (2\nu+2\rho+1)]\,z^{(1)} + (\rho+2\nu)(\rho+2\nu+1)\,xz = 0. \tag{14}$$

§ 11. Développements de $K^{\nu,\rho}(\sqrt{1+x^2})$.

Revenons maintenant à l'équation différentielle § 1, (4), nous aurons pour la fonction

$$F(\sqrt{1+x^2}) = K^{\nu,\rho}(\sqrt{1+x^2})$$

cette équation analogue:

$$\frac{x^2}{1+x^2}\cdot F^{(2)}(\sqrt{1+x^2}) - \frac{1+2\nu}{\sqrt{1+x^2}}\cdot F^{(1)}(\sqrt{1+x^2}) + \frac{\rho(\rho+2\nu)\,F(\sqrt{1+x^2})}{1+x^2} = 0; \tag{1}$$

posons ensuite $y = F(\sqrt{1+x^2})$, nous aurons immédiatement:

$$\left.\begin{aligned} F^{(1)}(\sqrt{1+x^2}) &= \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \cdot \frac{dy}{dx} \\ F^{(2)}(\sqrt{1+x^2}) &= \frac{1+x^2}{x^2} \cdot \frac{d^2y}{dx} - \frac{1}{x^3} \cdot \frac{dy}{dx}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

d'où, en vertu de (1), cette équation nouvelle:

$$x(1+x^2)\, y^{(2)} + (2\nu + (1+2\nu)\, x^2)\, y^{(1)} - \rho(\rho+2\nu)\, x \cdot y = 0 \tag{3}$$

qui admet comme intégrale la fonction

$$y = K^{\nu,\rho}(\sqrt{1+x^2}). \tag{4}$$

Intégrons maintenant à l'aide de la méthode expliquée dans le § 2 l'équation (3), nous trouvons comme intégrales particulières ces deux séries hypergéométriques:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= F\left(-\frac{\rho}{2}, \nu+\frac{\rho}{2}, \nu+\frac{1}{2}, -x^2\right) \\ y_2 &= x^{1-2\nu} \cdot F\left(\frac{\rho+1}{2}, \frac{1-\rho}{2}-\nu, \frac{3}{2}-\nu, -x^2\right) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

où il faut admettre $|x| < 1$; c'est-à-dire que nous obtenons des identités de cette forme:

$$\left.\begin{aligned} P^{\nu,\rho}(\sqrt{1+x^2}) &= a y_1 + b y_2 \\ Q^{\nu,\rho}(\sqrt{1+x^2}) &= a_1 y_1 + b_1 y_2, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

où les a et b sont des constantes par rapport à x qui se déterminent en mettant dans (6) $x = 0$ et $x = \pm i$.

Or, les développements (6) ne présentant qu'un intérêt assez médiocre, nous ne nous arrêtons pas à la détermination des constantes susdites.

Au contraire, nous avons à transformer l'équation différentielle (3) en y prenant $1 : x$ comme variable indépendante.

A cet effet, appliquons les formules différentielles § 1, (6), nous aurons cette autre équation:

$$x(1+x^2)\, z^{(2)} + (1-2\nu + (2-2\nu)\, x^2)\, z^{(1)} - \frac{\rho(\rho+2\nu)}{x} \cdot z = 0 \tag{7}$$

qui donnera pour $|x| > 1$ ces deux intégrales particulières:

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= x^{\rho} \cdot F\left(-\frac{\rho}{2}, -\nu-\frac{1+\rho}{2}, 1-\nu-\rho, -\frac{1}{x^2}\right) \\ z_2 &= x^{-\rho-2\nu} \cdot F\left(\nu+\frac{\rho}{2}, \frac{\rho+1}{2}, 1+\nu+\rho, -\frac{1}{x^2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

de l'équation (3).

Cela posé, nous aurons ces deux autres identités

$$Q^{\nu,\rho}(\sqrt{1+x^2}) = a z_1 + b z_2 \tag{9}$$

$$P^{\nu,\rho}(\sqrt{1+x^2}) = a_1 z_1 + b_1 z_2; \tag{10}$$

or, une étude du point critique $x = \infty$ donnera immédiatement, en vertu de § 8, (1), (2): $a = b_1 = 0$. Pour déterminer les deux autres coefficients a_1 et b_1 multiplions par $x^{-\rho}$ et respectivement par $x^{\rho+2\nu}$ les deux formules (9), (10), puis mettons $|x| = \infty$, nous aurons finalement, en vertu de § 7, (12), (13):

$$P^{\nu,\rho}(\sqrt{1+x^2}) = \frac{(2x)^\rho\,\Gamma(\nu+\rho)}{\Gamma(\nu)\,\Gamma(\rho+1)}\cdot F\left(-\frac{\rho}{2}, -\nu-\frac{\rho+1}{2}, 1-\nu-\rho, -\frac{1}{x^2}\right) \tag{11}$$

$$Q^{\nu,\rho}(\sqrt{1+x^2}) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho+2\nu)\,x^{-\rho-2\nu}}{2^{\rho+1}\cdot\Gamma(\nu+\rho+1)}\cdot F\left(\frac{\rho+1}{2}, \nu+\frac{\rho}{2}, 1+\nu+\rho, -\frac{1}{x^2}\right). \tag{12}$$

Posons maintenant dans ces deux formules $y = \sqrt{1+x^2}$, ce qui donnera $x^2 = y^2-1$, nous aurons, en mettant de nouveau x au lieu de y, les développements suivants:

$$P^{\nu,\rho}(x) = \frac{2^\rho\,\Gamma(\nu+\rho)\,(x^2-1)^{\frac{\rho}{2}}}{\Gamma(\nu)\,\Gamma(\rho+1)}\cdot F\left(-\frac{\rho}{2}, -\nu-\frac{\rho+1}{2}, 1-\nu-\rho, \frac{1}{1-x^2}\right) \tag{13}$$

$$Q^{\nu,\rho}(x) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho+2\nu)\,(x^2-1)^{-\nu-\frac{\rho}{2}}}{2^{\rho+1}\,\Gamma(\nu+\rho+1)}\cdot F\left(\nu+\frac{\rho}{2}, \frac{\rho+1}{2}, 1+\nu+\rho, \frac{1}{1-x^2}\right) \tag{14}$$

qui sont valables, pourvu que $|1-x^2| > 1$; or, mettons $x = \xi + i\eta$, où ξ et η sont des quantités réelles, la condition susdite donnera

$$(\xi^2+\eta^2)^2 - 2(\xi^2-\eta^2) > 0; \tag{15}$$

c'est-à-dire que les séries en question sont convergentes *à l'extérieur* du lemniscat

$$(\xi^2+\eta^2)^2 - 2(\xi^2-\eta^2) = 0. \tag{16}$$

§ 12. Développement de $K^{\nu,\rho}\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right)$.

Prenons ensuite dans § 1, (4) $\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}$ comme variable indépendante, un simple calcul donnera pour les dérivées de la fonction

$$y = F\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right)$$

des identités de cette forme:

$$F^{(1)}\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right) = \frac{2x^2}{x^2-1}\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$F^{(2)}\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right) = \left(\frac{2x^2}{x^2-1}\right)^2\cdot\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{8x^3}{(x^2-1)^3}\cdot\frac{dy}{dx},$$

d'où il résulte pour la fonction

$$y = K^{\nu,\rho}\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right) \tag{1}$$

cette équation différentielle:

$$x^2(1-x^2)\,y^{(2)} - ((2\nu-1)\,x + (2\nu+1)\,x^3)\,y^{(1)} - \rho(\rho+2\nu)(1-x^2)\,y = 0 \tag{2}$$

qui admet comme intégrales particulières ces deux fonctions:

$$y_1 = x^{-\rho} \cdot F(-\rho, \nu, 1-\nu-\rho, x^2)$$

$$y_2 = x^{\rho+2\nu} \cdot F(\rho+2\nu, \nu, 1+\nu+\rho, x^2),$$

définies pourvu que $|x| < 1$.

Cela posé, nous obtenons des identités de cette forme:

$$P^{\nu,\rho}\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right) = a y_1 + b y_2 \tag{3}$$

$$Q^{\nu,\rho}\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right) = a_1 y_1 + b_1 y_2; \tag{4}$$

pour déterminer les constantes inconnues, faisons tourner autour du point singulier $x = \infty$ la variable x, nous aurons immédiatement $a_1 = b = 0$, tandis que les deux autres constantes se déterminent si nous multiplions respectivement par x^{ρ} et par $x^{-\rho-2\nu}$ les deux équations (3) et (4) et si nous posons ensuite $x = 0$.

Appliquons les formules § 7, (12), (13), nous aurons finalement

$$P^{\nu,\rho}\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right) = \frac{\Gamma(\nu+\rho)\, x^{-\rho}}{\Gamma(\rho+1)\,\Gamma(\nu)} \cdot F(-\rho, \nu, 1-\nu-\rho, x^2), \tag{5}$$

$$Q^{\nu,\rho}\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}\right) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho+2\nu)\, x^{\rho+2\nu}}{2^{1-2\nu}\,\Gamma(\nu+\rho+1)} \cdot F(\rho+2\nu, \nu, 1+\nu+\rho, x^2), \tag{6}$$

formules qui sont valables, pourvu que $|x| < 1$.

Or, remarquons que les fonctions qui figurent aux premiers membres de (5), (6) sont symétriques dans x et $1:x$, le cas $|x| > 1$ peut être traité immédiatement en posant simplement dans les formules en question $1:x$ au lieu de x.

Posons encore

$$\frac{\xi}{2}+\frac{1}{2\xi} = x, \quad \xi = x \pm \sqrt{x^2-1},$$

les formules (5) (6) s'écriront aussi sous cette autre forme:

$$P^{\nu,\rho}(x) = \frac{\Gamma(\nu+\rho)\cdot\xi^{\rho}}{\Gamma(\nu)\,\Gamma(\rho+1)} \cdot F\left(-\rho, \nu, 1-\nu-\rho, \frac{1}{\xi^2}\right) \tag{7}$$

$$Q^{\nu,\rho}(x) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho+2\nu)\cdot\xi^{-\rho-2\nu}}{2^{1-2\nu}\cdot\Gamma(\nu+\rho+1)} \cdot F\left(\rho+2\nu, \nu, 1+\nu+\rho, \frac{1}{\xi^2}\right), \tag{8}$$

où nous avons à déterminer la valeur de $\xi = x \pm \sqrt{x^2-1}$, de sorte que $|\xi| > 1$.

§ 13. Développement de $(x^2+1)^{\rho} \cdot K^{\nu,\rho}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.

Pour généraliser une formule intéressante due à Murphy nous avons à étudier la fonction

$$(x^2+1)^{\rho} \cdot K^{\nu,\rho}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right).$$

A cet effet, appliquons l'identité évidente

$$K^{\nu,\rho}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = K^{\nu,\rho}\left(\frac{2}{1+x^2}-1\right),$$

nous aurons tout d'abord à mettre dans l'équatton différentielle § 1, (4) $\frac{2}{x}-1$ au lieu de x, ce qui donnera immédiatement pour la fonction

$$y = K^{\nu,\rho}\left(\frac{2}{x}-1\right)$$

cette équation différentielle analogue

$$x^2(1-x)\,y^{(2)} + \left[(1-2\nu)\,x + \left(\nu-\frac{3}{2}\right)x^2\right]y^{(1)} - \rho\,(\rho+2\nu)\,y = 0. \tag{1}$$

Posons ensuite dans (1) $y = x^{-\rho}\cdot z$, nous verrons que cette équation différentielle

$$x\,(1-x)\,z^{(2)} + \left[1-2\nu-2\rho+\left(\nu+2\rho-\frac{3}{2}\right)x\right]z^{(1)} - \rho\left(\rho+\nu-\frac{1}{2}\right)z = 0 \tag{2}$$

admet comme intégrale la fonction

$$z = x^{\rho}K^{\nu,\rho}\left(\frac{2}{x}-1\right), \tag{3}$$

d'où, en mettant x^2+1 au lieu de x, pour la fonction

$$U = (x^2+1)^{\rho}\,K^{\nu,\rho}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right), \tag{4}$$

cette équation différentielle:

$$x\,(1+x^2)\,U^{(2)} + [2\nu-(4\rho+2\nu-1)\,x^2]\,U^{(1)} + 2\rho\,(2\rho+2\nu-1)\,x\,U = 0. \tag{5}$$

Cela posé, la méthode ordinaire donnera ces deux intégrales particulières de (5):

$$y_1 = F\left(-\rho,\ -\rho-\nu+\frac{1}{2},\ \nu+\frac{1}{2},\ -x^2\right) \tag{6}$$

$$y_2 = x^{1-2\nu}\cdot F\left(\frac{1}{2}-\nu-\rho,\ 1-\rho-2\nu,\ \frac{3}{2}-\nu,\ -x^2\right), \tag{7}$$

d'où il résulte des identités de la forme

$$(x^2+1)^{\rho}\cdot P^{\nu,\rho}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = a y_1 + b y_2 \tag{8}$$

$$(x^2+1)^{\rho}\cdot Q^{\nu,\rho}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = a_1 y_1 + b_1 y_2. \tag{9}$$

Pour déterminer maintenant les quatre coefficients qui figurent dans (8), (9) mettons tout d'abord $x = 0$, nous aurons immédiatement, en vertu de § 7, (4) (5) et en supposant pour un instant $\Re(\nu) < \frac{1}{2}$:

$$a = \frac{\Gamma(\rho+2\nu)\sin\pi(\rho+2\nu)}{2\Gamma(2\nu)\,\Gamma(\rho+1)\cos\nu\pi\,\sin\pi(\nu+\rho)} \tag{10}$$

$$a_1 = \frac{\Gamma(\rho+2\nu)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}{2\Gamma(\rho+1)}. \tag{11}$$

Mettons ensuite dans (8), (9) $x = i = e^{\frac{\pi i}{2}}$, les formules § 7, (12), (13) donnent de même, en vertu de (10), (11):

$$b = -\frac{\pi \sin \pi\rho \, e^{\nu\pi i} \cdot i}{\Gamma(\nu)\,\Gamma\left(\frac{3}{2}-\nu\right)\cos\nu\pi \sin\pi(\nu+\rho)} \tag{12}$$

$$b_1 = \frac{\pi e^{\nu\pi i} \cdot i}{2\Gamma\left(\frac{3}{2}-\nu\right)\cos\nu\pi}. \tag{13}$$

On voit que le cas particulier $\nu = \frac{1}{2}$ exige des recherches ultérieures, ce qui s'accorde bien avec le fait que les deux intégrales particulières (6), (7) deviendront identiques pour cette valeur de ν. Dans le cas particulier $\rho = n$, n étant un positif entier, nous aurons au contraire:

$$b = 0, \quad a = \frac{\Gamma(\rho+2\nu)}{\Gamma(2\nu)\,\Gamma(\rho+1)},$$

d'où pour $\nu = \frac{1}{2}$:

$$b = 0, \quad a = 1,$$

ce qui nous conduira précisément à la formule de Murphy [1]).

§ 14. Développement de $K^{\nu,\rho}(\sqrt{1-x})$ et $(1-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot K^{\nu,\rho}(\sqrt{1-x})$.

Prenons ensuite dans § 1, (4) $\sqrt{1-x}$ comme variable indépendante, nous trouvons pour la fonction

$$F(\sqrt{1-x}) = K^{\nu,\rho}(\sqrt{1-x})$$

cette équation différentielle:

$$x F^{(2)}(\sqrt{1-x}) - (1+2\nu)\sqrt{1-x} \cdot F^{(1)}(\sqrt{1-x}) + \rho(\rho+2\nu) F(\sqrt{1-x}) = 0. \tag{1}$$

Or, mettons ensuite $y = F(\sqrt{1-x})$, un calcul simple donnera:

$$\left.\begin{aligned} F^{(1)}(\sqrt{1-x}) &= -2\sqrt{1-x} \cdot \frac{dy}{dx} \\ F^{(2)}(\sqrt{1-x}) &= 4(1-x) \cdot \frac{d^2y}{dx^2} - 2 \cdot \frac{dy}{dx}, \end{aligned}\right| \tag{2}$$

d'où, en vertu de (1), l'équation différentielle

$$4x(1-x)\,y^{(2)} + (2 + 4\nu - 4(1+\nu)x)\,y^{(1)} + \rho(\rho+2\nu)\,y = 0 \tag{3}$$

qui admet comme intégrale la fonction

$$y = K^{\nu,\rho}(\sqrt{1-x}).$$

Cela posé, la méthode ordinaire donnera pour (3) ces deux intégrales particulières:

$$y_1 = F\left(-\frac{\rho}{2}, \nu+\frac{\rho}{2}, \nu+\frac{1}{2}, x\right) \tag{4}$$

$$y_2 = x^{\frac{1}{2}-\nu} \cdot F\left(\frac{\rho+1}{2}, \frac{1}{2}-\nu-\rho, \frac{3}{2}-\nu, x\right), \tag{5}$$

[1]) Elementary principles of the theories of electricity, heat and molecular actions, t. 1; Cambridge 1833.

d'où il résulte des identités de la forme:

$$P^{\nu,\rho}(\sqrt{1-x}) = a y_1 + b y_2 \tag{6}$$

$$Q^{\nu,\rho}(\sqrt{1-x}) = a_1 y_1 + b_1 y_2. \tag{7}$$

Pour déterminer les quatre coefficients qui figurent dans (6), (7), mettons d'abord $x = 0$, nous aurons, en supposant pour un instant $\Re(\nu) < \frac{1}{2}$,

$$a = P^{\nu,\rho}(1), \quad b = Q^{\nu,\rho}(1), \tag{8}$$

tandis que l'hypothèse $x = 1$ donnera de même

$$\left.\begin{aligned} P^{\nu,\rho}(0) &= a \cdot \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{\rho}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\rho}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\rho}{2}+\nu\right)} + b \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\nu\right)\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(1+\frac{\rho}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\rho}{2}-\nu\right)} \\ Q^{\nu,\rho}(0) &= a_1 \cdot \frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1-\rho}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\rho}{2}+\nu\right)} + b_1 \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\nu\right)\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(1+\frac{\rho}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\rho}{2}-\nu\right)} \end{aligned}\right\}, \tag{9}$$

ce qui nous conduira immédiatement au but si nous appliquons les formules § 7, (4), (5) et § 8, (21), (22).

Dans le cas particulier où ρ est égal à un entier non négatif, nous aurons $b = 0$.

Prenons encore pour point de départ l'équation différentielle § 10, (7), puis appliquons les formules différentielles (2), nous verrons que cette équation différentielle

$$4x(1-x)\,y^{(2)} + (2 + 4\nu - (8+4\nu)x)\,y^{(1)} + (\rho-1)(\rho+2\nu+1)\,y = 0 \tag{10}$$

admet comme intégrale particulière la fonction

$$y = (1-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot K^{\nu,\rho}(\sqrt{1-x}). \tag{11}$$

Or, la méthode ordinaire donnant comme intégrales particulières de (10) les deux séries hypergéométriques

$$y_1 = F\left(\frac{1-\rho}{2}, \frac{1+\rho}{2}+\nu, \nu+\frac{1}{2}, x\right)$$

$$y_2 = x^{\frac{1}{2}-\nu} \cdot F\left(1+\frac{\rho}{2}, 1-\nu-\frac{\rho}{2}, \frac{3}{2}-\nu, x\right),$$

il résulte des identités de cette forme:

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot P^{\nu,\rho}(\sqrt{1-x}) = a y_1 + b y_2 \tag{12}$$

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot Q^{\nu,\rho}(\sqrt{1-x}) = a_1 y_1 + b_1 y_2, \tag{13}$$

d'où en mettant $x = 0$ et en supposant pour un instant $\Re(\nu) < \frac{1}{2}$:

$$a = P^{\nu,\rho}(1), \quad a_1 = Q^{\nu,\rho}(1). \tag{14}$$

Quant à la détermination des deux autres coefficients b et b_1, nous faisons tourner autour du point $x = 0$ la variable x, ce qui nous conduira au but à l'aide des formules du § 8; or, une telle détermination générale des coefficients susdits ne présente qu'un intérêt médiocre.

Nous nous bornerons à remarquer en passant que le cas particulier, où ρ est égal à un positif entier *impair* donnera $b = 0$.

§ 15. Développement de $(1+x^2)^{-\nu-\frac{\rho}{2}} \cdot K^{\nu,\rho}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

Nous avons encore à étudier une autre transformation de l'argument d'une fonction métasphérique en développant la fonction

$$y = (1+x^2)^{-\nu-\frac{\rho}{2}} \cdot K^{\nu,\rho}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right). \tag{1}$$

A cet effet, introduisons dans § 10, (13) la variable indépendante $(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$, puis mettons:

$$y = F\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) = (1+x^2)^{-\nu-\frac{\rho}{2}} \cdot K^{\nu,\rho}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right);$$

il résulte pour la fonction (1) cette équation différentielle:

$$\frac{x^2}{(1+x^2)^2} \cdot F^{(2)}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) - \left(2\rho+4\nu+\frac{1-2\nu-2\rho}{1+x^2}\right) \cdot \frac{F^{(1)}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{\sqrt{1+x^2}} +$$

$$+ (\rho+2\nu)(\rho+2\nu+1) F\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) = 0. \tag{2}$$

Cela posé, les formules différentielles

$$\left.\begin{aligned} F^{(1)}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) &= -\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x} \cdot \frac{dy}{dx} \\ F^{(2)}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) &= \frac{(1+x^2)^3}{x^2} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{(1+x^2)^2(1-2x^2)}{x} \cdot \frac{dy}{dx} \end{aligned}\right| \tag{3}$$

donneront pour la fonction (1), considérée comme fonction de l'argument x, cette équation différentielle:

$$x(1+x^2)\,y^{(2)} + (2\nu+(2+4\nu+2\rho)x^2)\,y^{(1)} + (\rho+2\nu)(\rho+2\nu+1)\,xy = 0 \tag{4}$$

qui est très semblable à § 10, (14).

En effet, mettons dans cette dernière équation ix au lieu de x, $\rho+\nu+\frac{1}{2}$ au lieu de ν et $-\rho-1$ au lieu de ρ, nous retrouvons précisément notre équation (4), ce qui donnera des identités de la forme

$$\left.\begin{aligned} &P^{\nu,\rho}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \\ &= \left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)^{\nu+\frac{\rho}{2}} \cdot \left(A \cdot P^{\nu+\rho+\frac{1}{2},\,-\rho-1}\left(\frac{1}{xi}\right) + B \cdot Q^{\nu+\rho+\frac{1}{2},\,-\rho-1}\left(\frac{1}{xi}\right)\right) \end{aligned}\right| \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} &Q^{\nu,\rho}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \\ &= \left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)^{\nu+\frac{\rho}{2}} \cdot \left(A_1 \cdot P^{\nu+\rho+\frac{1}{2},\,-\rho-1}\left(\frac{1}{xi}\right) + B_1 \cdot Q^{\nu+\rho+\frac{1}{2},\,-\rho-1}\left(\frac{1}{xi}\right)\right) \end{aligned}\right|. \tag{6}$$

Pour déterminer les quatre coefficients inconnus qui figurent dans (5), (6) mettons tout d'abord $x=\infty$, nous aurons:

$$\left.\begin{aligned} P^{\nu,\rho}(0) &= A\cdot P^{\nu+\rho+\frac{1}{2},\,-\rho-1}(0)+B\cdot Q^{\nu+\rho+\frac{1}{2},\,-\rho-1}(0)\\ Q^{\nu,\rho}(0) &= A_1\cdot P^{\nu+\rho+\frac{1}{2},\,-\rho-1}(0)+B_1\cdot Q^{\nu+\rho+\frac{1}{2},\,-\rho-1}(0),\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

tandis que nous obtenons deux autres systèmes d'équations linéaires en mettant $x=0$, $x=-i$.

Appliquons ensuite les invariants § 5, (9), (10), nous obtenons, en vertu de (5), (6), ces deux autres identités analogues:

$$P^{\nu,\rho}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^{\frac{\rho}{2}}\cdot\left(A'\cdot P^{\frac{1}{2}-\nu-\rho,\,\rho}\left(\frac{1}{xi}\right)+B'\cdot Q^{\frac{1}{2}-\nu-\rho,\,\rho}\left(\frac{1}{xi}\right)\right) \tag{8}$$

$$Q^{\nu,\rho}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^{\frac{\rho}{2}}\cdot\left(A_1'\cdot P^{\frac{1}{2}-\nu-\rho,\,\rho}\left(\frac{1}{xi}\right)+B_1'\cdot Q^{\frac{1}{2}-\nu-\rho,\,\rho}\left(\frac{1}{xi}\right)\right), \tag{9}$$

dont les coefficients se déterminent soit par un procédé analogue au précédant soit à l'aide des résultats déjà obtenus pour (5) et (6) en transformant les paramètres ν et ρ comme nous venons de l'indiquer.

§ 16. Champ de convergence d'une série de fonctions métasphériques.

Les formules que nous venons de développer dans le § 12, savoir

$$P^{\nu,\rho}(x)=\frac{\Gamma(\nu+\rho)\,\xi^{\rho}}{\Gamma(\nu)\,\Gamma(\rho+1)}\cdot F\left(-\rho,\ \nu,\ 1-\nu-\rho,\ \frac{1}{\xi^2}\right) \tag{1}$$

$$Q^{\nu,\rho}(x)=\frac{\sqrt{\pi}\ \Gamma(\rho+2\nu)}{2^{1-2\nu}\,\Gamma(\nu+\rho+1)\,\xi^{\rho+2\nu}}\cdot F\left(\rho+2\nu,\ \nu,\ 1+\nu+\rho,\ \frac{1}{\xi^2}\right), \tag{2}$$

où nous avons posé pour abréger $\xi=x\pm\sqrt{x^2-1}$, nous permettent de discuter le champ de convergence d'une série de fonctions métasphériques.

A cet effet, considérons la série infinie

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} a_s\cdot Q^{\nu,\rho+s}(x),$$

où il faut admettre $|\xi|>1$, puis mettons avec C. Neumann [1])

$$x=\zeta+i\eta=\cos(\alpha-i\beta), \tag{3}$$

où ζ, η, α et β désignent des quantités réelles, nous aurons:

$$\sqrt{x^2-1}=\pm i\sin(\alpha-i\beta),$$

ce qui donnera ensuite:

$$\left|x\pm\sqrt{x^2-1}\right|=e^{\beta}, \tag{4}$$

de sorte qu'il faut admettre $\beta>0$.

[1]) Ueber die Entwicklung einer Funktion mit imaginärem Argument nach den Kugelfunktionen erster und zweiter Art, p. 6; Halle 1862.

Remarquons ensuite que les identités (3) donnent ces deux autres:

$$\zeta = \frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{2} \cdot \cos\alpha\,, \quad \eta = \frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{2} \cdot \sin\alpha\,, \tag{5}$$

d'où immédiatement:

$$\frac{\zeta^2}{\left(\frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{2}\right)^2} + \frac{\eta^2}{\left(\frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{2}\right)^2} = 1\,, \tag{6}$$

d'où ce théorème général:

Supposons que la série de puissances

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \tag{7}$$

ait son rayon de convergence égal à r, qui est plus grand que l'unité, la série de fonctions métasphériques

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} a^s \cdot Q^{\nu,\rho+s}(x) \tag{8}$$

est convergente à l'extérieur de l'ellipse

$$\frac{\zeta^2}{\left(\frac{r}{2} + \frac{1}{2r}\right)^2} + \frac{\eta^2}{\left(\frac{r}{2} - \frac{1}{2r}\right)^2} = 1 \tag{9}$$

qui a ses foyers dans les points $(\pm 1,\ 0)$.

§ 17. Développement d'une seule puissance.

Comme application du théorème général que nous venons de démontrer, étudions une série de la forme

$$x^{-\rho-2\nu} = \sum_{s=0}^{s=\infty} a_s^{\nu,\rho} \cdot Q^{\nu,\rho+2s}(x). \tag{1}$$

A cet effet, supposons d'abord convergente et différentiable terme à terme deux fois par rapport à x la série qui figure au second membre de (1), puis introduisons l'opération suivante:

$$\vartheta_x f(x) = (1-x^2)\, f^{(2)}(x) - (1+2\nu)\, x\, f^{(1)}(x)\,;$$

nous aurons, en vertu de l'équation différentielle § 1, (4):

$$\vartheta_x Q^{\nu,\rho+p}(x) = -(\rho+p)(\rho+p+2\nu)\, Q^{\nu,\rho+p}(x)\,,$$

tandis qu'un calcul direct donnera:

$$\vartheta_x x^{-\rho-2\nu} = (\rho+2\nu)(\rho+2\nu+1)\, x^{-\rho-2\nu-2} - \rho(\rho+2\nu)\, x^{-\rho-2\nu}\,;$$

il résulte, en vertu de (1), cet autre développement:

$$\left.\begin{aligned} &(\rho+2\nu)(\rho+2\nu+1)\, x^{-\rho-2\nu-2} - \rho(\rho+2\nu)\, x^{-\rho-2\nu} = \\ &= -\sum_{s=0}^{s=\infty} a_s^{\nu,\rho}\, (\rho+2s)(\rho+2s+2\nu)\, Q^{\nu,\rho+2s}(x). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Cela posé, développons, en vertu de (1), les deux puissances qui figurent au premier membre de (2), puis égalons les coefficients de la même fonction Q dans l'identité ainsi obtenue, nous aurons sans peine cette formule récursive:

$$(\rho+2\nu)(\rho+2\nu+1)\cdot a_{s-1}^{\nu,\rho+2} = -4s(\rho+\nu+s)\cdot a_s^{\nu,\rho}. \tag{3}$$

Multiplions ensuite par $x^{\rho+2\nu}$ les deux membres de (1), puis mettons $x=\infty$, nous aurons:

$$a_0^{\nu,\rho} = \frac{2^{\rho+1}\cdot\Gamma(\nu+\rho+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho+2\nu)}, \tag{4}$$

d'où, en vertu de (3) et en appliquant la conclusion ordinaire de n à $n+1$, cette expression générale:

$$a^{\nu,\rho} = \frac{(-1)^n(\nu+\rho+2n)\cdot\Gamma(\nu+\rho+n)\,2^{\rho+1}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\rho+2\nu)\,n!}, \tag{5}$$

de sorte que nous avons finalement ce développement *empirique*:

$$x^{-\rho-2\nu} = \frac{2^{\rho+1}}{\Gamma(\rho+2\nu)\sqrt{\pi}}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s(\nu+\rho+2s)\cdot\frac{\Gamma(\nu+\rho+s)}{s!}\cdot Q^{\nu,\rho+2s}(x) \tag{6}$$

que nous avons à démontrer maintenant d'une manière rigoureuse.

A cet effet, remarquons tout d'abord que la série qui figure au second membre de (6) est convergente comme une série de puissances, pourvu que $\left|x\pm\sqrt{x^2-1}\right|>1$; de plus désignons pas y la somme de cette série convergente, la formule (3) donnera pour y cette équation linéaire, mais non homogène:

$$(1-x^2)\,y^{(2)}-(1+2\nu)\,xy^{(1)} = (\rho+2\nu)(\rho+2\nu+1)\,x^{-\rho-2\nu-2}-\rho(\rho+2\nu)\,x^{-\rho-2\nu},$$

d'où immédiatement:

$$y = x^{-\rho-2\nu}+C\cdot\int(1-x^2)^{\nu+\frac{1}{2}}\,dx+C_1, \tag{7}$$

où C et C_1 désignent des constantes indépendantes de x.

Cela posé, faisons tourner autour du point critique $x=\infty$ la variable x, il résulte immédiatement $C=C_1=0$; telle est la démonstration rigoureuse de la formule (6).

Mettons ensuite dans (6) $-\rho-2\nu$ au lieu de ν, une application de l'invariant § 5, (5) donnera après un simple calcul cet autre développement:

$$x^{\rho} = \frac{\Gamma(\nu)\,\Gamma(\rho+1)}{2^{\rho}}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{\rho+\nu-2s}{s!\,\Gamma(\rho+\nu-s+1)}\cdot P^{\nu,\rho-2s}(x), \tag{8}$$

qui est applicable où l'est la formule (6).

CHAPITRE III.

Les fonctions ultrasphériques.

§ 18. Définitions des fonctions ultrasphériques.

Parmi les fonctions métasphériques, celles à l'indice entier méritent d'être étudiées séparément, à la fois au point de vue analytique et au point de vue historique.

En effet, mettons $\rho = n$, où n désigne un entier non négatif, il est évident que les deux fonctions $M^{\nu, n}(x)$ et $P^{\nu, n}(x)$, introduites dans le § 2, se réduisent au même polynôme entier de x et ν, étant du degré n par rapport à x, de sorte que nous obtenons pour cette fonction particulière les expressions suivantes, savoir en appliquant § 2, (11):

$$P^{\nu, n}(x) = \frac{\Gamma(\nu+n)\,(2x)^n}{n!\,\Gamma(\nu)} \cdot F\left(-\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2}, 1-n-\nu, \frac{1}{x^2}\right), \tag{1}$$

tandis que la formule § 2, (9) donnera de même:

$$\left.\begin{aligned} P^{\nu, 2n}(x) &= \frac{(-1)^n\,\Gamma(\nu+n)}{n!\,\Gamma(\nu)} \cdot F\left(-n, \nu+n, \frac{1}{2}, x^2\right) \\ P^{\nu, 2n+1}(x) &= \frac{(-1)^n\,\Gamma(\nu+n+1)\cdot 2x}{n!\,\Gamma(\nu)} \cdot F\left(-n, \nu+n+1, \frac{3}{2}, x^2\right); \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

remarquons encore cette autre représentation générale de notre fonction particulière:

$$P^{\nu, n}(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \cdot \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s\,\Gamma(\nu+n-s)}{s!\,(n-2s)!} \cdot (2x)^{n-2s} \tag{3}$$

qui peut être déduite immédiatement de (1) où de (2).

Nous aurons par exemple:

$$P^{\nu, 0}(x) = 1, \quad P^{\nu, 1}(x) = 2\nu x, \tag{4}$$

tandis que les définitions générales du § 2 donnent

$$P^{\nu, -n}(x) = 0, \tag{5}$$

où n désigne un positif entier.

La fonction $P^{\nu, n}(x)$ étant un polynôme entier de x, la formule § 7, (4) est toujours applicable dans ce cas, de sorte que nous aurons:

$$P^{\nu, n}(1) = \frac{\Gamma(n+2\nu)}{n!\,\Gamma(2\nu)}, \tag{6}$$

tandis que la formule (3) donnera immédiatement:

$$P^{\nu, 2n+1}(0) = 0, \quad P^{\nu, 2n}(0) = \frac{(-1)^n\,\Gamma(\nu+n)}{n!\,\Gamma(\nu)}. \tag{7}$$

Quant à la fonction correspondante $Q^{\nu,n}(x)$, nous aurons pour $|x|>1$:

$$Q^{\nu,n}(x) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+2\nu)\,x^{-n-2\nu}}{2^{n+1}\,\Gamma(\nu+n+1)} \cdot F\left(\nu+\frac{n}{2},\ \nu+\frac{n+1}{2},\ 1+\nu+n,\ \frac{1}{x^2}\right), \tag{8}$$

d'où, pour $n=-1$, cette expression simple:

$$Q^{\nu,-1}(x) = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2\nu-1)}{\Gamma(\nu)} \cdot (x^2-1)^{\frac{1}{2}-\nu}. \tag{9}$$

Pour les fonctions $P^{\nu,n}(x)$ et $Q^{\nu,n}(x)$ ainsi définies nous proposons le nom de *fonctions ultrasphériques*; mettons en effet $\nu=\frac{1}{2}$, nous retrouvons les fonctions sphériques ordinaires, savoir:

$$P^{\frac{1}{2},n}(x) = P^n(x), \quad Q^{\frac{1}{2},n}(x) = Q^n(x). \tag{10}$$

Dans ce cas particulier, la définition (8) de $Q^{\nu,n}(x)$ deviendra illusoire pour des valeurs négatives entières de n.

Posons dans (8) $\nu=\frac{1}{2}$, $n=0$, il résulte cette expression simple:

$$Q^0(x) = \frac{1}{2} \cdot \log\frac{x+1}{x-1}, \quad |x|>1. \tag{11}$$

§ 19. Propriétés fondamentales des fonctions ultrasphériques.

La définition de $P^{\nu,n}(x)$ montre que cette fonction n'a dans toute l'étendue du plan des x que le seul point singulier $x=\infty$, qui est un pôle ordinaire de l'ordre n. Quant à $Q^{\nu,n}(x)$, cette fonction a généralement des points critiques dans $x=\infty$, $x=+1$ et $x=-1$.

Les formules générales du § 8 donnent immédiatement ici ces cas plus particuliers:

$$\mathfrak{D}(\infty)\,Q^{\nu,n}(x) = e^{4\nu\pi i} \cdot Q^{\nu,n}(x) \tag{1}$$

$$\mathfrak{D}(+1)\,Q^{\nu,n}(x) = (-1)^n 2^{2\nu-1}\,\Gamma(\nu)\sqrt{\pi}\,e^{-\nu\pi i} \cdot P^{\nu,n}(x) - e^{-2\nu\pi i} \cdot Q^{\nu,n}(x) \tag{2}$$

$$\mathfrak{D}(-1)\,Q^{\nu,n}(x) = (-1)^n 2^{2\nu-1}\,\Gamma(\nu)\sqrt{\pi}\,e^{-3\nu\pi i} \cdot P^{\nu,n}(x) - e^{-2\nu\pi i} \cdot Q^{\nu,n}(x), \tag{3}$$

tandis que les opérations $\mathfrak{J}$ correspondantes nous conduiraient à des expressions obtenues de celles qui figurent aux seconds membres de (1), (2), (3) en y changeant dans les exposants le signe de i.

Posons dans (1) $\nu=\frac{1}{2}$, nous verrons que le point $x=\infty$ est un point ordinaire de la fonction sphérique $Q^n(x)$.

Quant à $Q^{\nu,n}(x)$ pour $|x|<1$, la valeur de cette fonction se détermine immédiatement à l'aide des formules § 8, (7), (9); appliquons ensuite les définitions § 18, (2), il résulte généralement:

$$e^{\pm\nu\pi i} \cdot Q^{\nu,n}(x) = (-1)^n \frac{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(\nu)}{2^{2-2\nu}} \cdot P^{\nu,n}(x) \mp \frac{i\sqrt{\pi}}{2^{2-2\nu}} \cdot L^{\nu,n}(x), \tag{4}$$

où nous avons posé pour abréger:

$$\left.\begin{aligned} L^{\nu,2n}(x) &= \frac{(-1)^n \Gamma\left(\nu+n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} \cdot 2x \cdot F\left(\frac{1}{2}-n,\ \nu+n+\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ x^2\right) \\ L^{\nu,2n+1}(x) &= \frac{(-1)^n \Gamma\left(\nu+n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} \cdot F\left(-\frac{1}{2}-n,\ \nu+n+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ x^2\right). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Nous avons encore à développer ici une formule intéressante concernant la fonction $Q^{\nu,n}(x)$, formule dont le cas particulier $\nu = \frac{1}{2}$ est dû à Gauss[1]); dans notre démonstration nous suivons C. Neumann[1]), en généralisant un peu la méthode élégante de l'illustre géomètre allemand.

A cet effet, remarquons tout d'abord que la définition § 1, (2) d'une fonction métasphérique générale donnera sans peine, par la conclusion ordinaire de n à $n+1$, une relation de cette forme:

$$K^{\nu,n}(x) = A^{\nu,n}(x)\, K^{\nu,1}(x) + B^{\nu,n}(x)\, K^{\nu,0}(x), \tag{6}$$

où n désigne un positif entier, tandis que A et B sont des polynômes entiers de x et de ν qui sont respectivement du degré $n-1$ ou $n-2$ par rapport à x.

Cela posé, la formule (6) donnera, en vertu de § 18, (4):

$$P^{\nu,n}(x) = 2\nu x \cdot A^{\nu,n}(x) + B^{\nu,n}(x), \tag{7}$$

tandis que nous obtenons de § 1, (2) et de § 18, (9):

$$Q^{\nu,1}(x) = 2\nu x \cdot Q^{\nu,0}(x) - \frac{\sqrt{\pi}\, \Gamma(2\nu)}{\Gamma(\nu)} \cdot (x^2-1)^{\frac{1}{2}-\nu}. \tag{8}$$

Introduisons maintenant dans (6) l'expression (8), il résulte, en vertu de (7), cette formule élégante:

$$Q^{\nu,n}(x) = Q^{\nu,0}(x) \cdot P^{\nu,n}(x) - \frac{\sqrt{\pi}\, \Gamma(2\nu)}{\Gamma(\nu)} \cdot (x^2-1)^{\frac{1}{2}-\nu} \cdot A^{\nu,n}(x), \tag{9}$$

d'où particulièrement pour $\nu = \frac{1}{2}$, en mettant $A^{\frac{1}{2},n}(x) = A^n(x)$ et en appliquant la formule particulière § 18, (11):

$$Q^n(x) = \frac{1}{2} \cdot P^n(x) \cdot \log \frac{x+1}{x-1} - A^n(x), \tag{10}$$

ce qui est précisément la formule de Gauss.

Quant aux deux polynômes $A^{\nu,n}(x)$ et $B^{\nu,n}(x)$, appliquons (9) puis (7); il résulte cette proposition intéressante:

Les deux polynômes $A^{\nu,n}(x)$ et $B^{\nu,n}(x)$ sont des solutions de l'équation aux différences finies § 1, (2) *dans laquelle l'indice ρ est un positif entier.*

Remarquons ensuite que $Q^{\nu,n}(x)$ et $P^{\nu,n}(x)$ satisfont toutes les deux à l'équation différentielle § 1, (4), tandis que les formules § 6, (10) et § 18, (9) montrent

[1]) Heine, Handbuch, t. I, p. 141; 1878.

que la fonction

$$(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} D_x Q^{\nu,0}(x)$$

est indépendante de x; il résulte, en vertu de (9), pour $A^{\nu,n}(x)$ cette équation différentielle linéaire non homogène du second ordre:

$$(1-x^2)\, y^{(2)} + (2\nu-3)\, x y^{(1)} - (n+1)(n+2\nu-1)\, y = D_x P^{\nu,n}(x), \tag{11}$$

dont le cas particulier $\nu = \frac{1}{2}$ est analogue à § 1, (4).

Différentions ensuite une et deux fois l'équation (11), puis remarquons que $D_x P^{\nu,n}(x)$ est une fonction ultrasphérique $K^{\nu+1,n-1}(x)$; il résulte, en vertu de § 1, (4) pour $y = A^{\nu,n}(x)$, cette équation homogène du quatrième ordre:

$$\left.\begin{aligned} &(1-x^2)^2\, y^{(4)} - 10x(1-x^2)\, y^{(3)} + (8-8\nu-(4\nu^2+4\nu-23)\,x^2)\, y^{(2)} + \\ &+ (4n\nu(\nu+n)+4\nu^2+\nu-1)\, x \cdot y^{(1)} - (n^2-1)((n+2\nu)^2-1)\, y = 0. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

On voit que la fonction $A^{\nu,n}(x)$ joue le même rôle dans la théorie des fonctions ultrasphériques que le polynôme de LOMMEL[1]) dans la théorie des fonctions cylindriques. Cependant on n'a pas encore réussi à donner sous une forme simple les coefficients du polynôme $A^{\nu,n}(x)$, même dans le cas le plus simple où $\nu = \frac{1}{2}$.

§ 20. Étude de la fonction $(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\nu}$.

Pour étudier d'un point de vue tout à fait élémentaire quelques autres cas particuliers de la fonction $P^{\nu,n}(x)$, nous avons à prendre pour point de départ la série infinie

$$f_\nu(x,\alpha) = \sum_{s=0}^{s=\infty} P^{\nu,s}(x) \cdot \alpha^s \tag{1}$$

qui est convergente, pourvu que $|\alpha| < |x \pm \sqrt{x^2-1}|$, comme le montrent clairement les résultats obtenus dans le § 16.

A cet effet, appliquons les formules § 6, (12), (13), nous trouvons pour $f_\nu(x,\alpha)$ ces deux équation fonctionnelles:

$$(1-2\alpha x+\alpha^2)\, f_{\nu+1}(x,\alpha) = f_\nu(x,\alpha)$$

$$\frac{\partial f_\nu(x,\alpha)}{\partial \alpha} = 2\nu(x-\alpha)\, f_{\nu+1}(x,\alpha),$$

d'où cette équation différentielle du premier ordre:

$$\frac{\partial f_\nu(x,\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{2\nu(x-\alpha)}{1-2\alpha x+\alpha^2} \cdot f_\nu(x,\alpha),$$

ce qui donnera pour la fonction $f_\nu(x,\alpha)$ une expression de la forme

$$f_\nu(x,\alpha) = \chi(\nu,x) \cdot (1-2\alpha x+\alpha^2)^{-\nu},$$

où la fonction $\chi(\nu,x)$ est indépendante de α. Pour déterminer la valeur de χ,

[1]) Voir mon Handbuch der Zylinderfunktionen, p. 23; 1904.

mettons dans (1) $a = 0$, ce qui donnera $f(x, 0) = 1$, de sorte que nous obtenons finalement cette formule classique dans l'histoire des fonctions sphériques:

$$(1-2ax+a^2)^{-\nu} = \sum_{s=0}^{s=\infty} P^{\nu,s}(x)\cdot a^s,\quad |a| < |x \pm \sqrt{x^2-1}|. \tag{2}$$

Cela posé, mettons dans (2) $\nu = 1$, $x = \cos\theta$, il résulte:

$$\frac{1}{1-2a\cos\theta+a^2} = \sum_{s=0}^{s=\infty} P^{1,s}(\cos\theta)\cdot a^s; \tag{3}$$

or, l'identité évidente

$$\frac{1}{1-2a\cos\theta+a^2} = \frac{1}{2i\sin\theta}\left(\frac{e^{i\theta}}{1-ae^{i\theta}} - \frac{e^{-i\theta}}{1-ae^{-i\theta}}\right)$$

donnera cet autre développement:

$$\frac{1}{1-2a\cos\theta+a^2} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{\sin(s+1)\theta}{\sin\theta}\cdot a^s, \tag{4}$$

d'où, en vertu de (3):

$$P^{1,n}(\cos\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}. \tag{5}$$

Différentions ensuite par rapport à ν la formule (2), puis mettons $\nu = 0$, il résulte de même:

$$-\log(1-2a\cos\theta+a^2) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \left(D_\nu P^{\nu,s}(\cos\theta)\right)_{\nu=0}\cdot a^s, \tag{6}$$

de sorte que l'identité évidente

$$-\log(1-2a\cos\theta+a^2) = -\log(1-ae^{i\theta}) - \log(1-ae^{-i\theta})$$

donnera, en vertu de la série logarithmique ordinaire, cette autre identité:

$$\left(D_\nu P^{\nu,n}(\cos\theta)\right)_{\nu=0} = \frac{2}{n}\cdot\cos(n\theta),\quad n \geqq 1. \tag{7}$$

Appliquons maintenant la série de puissances toujours convergente:

$$\frac{1}{\Gamma(\nu)} = \nu + a_2\nu^2 + a_3\nu^3 + \cdots,$$

il résulte, en vertu de (7), cette autre formule:

$$\lim_{\nu=0}\left(\Gamma(\nu)\,P^{\nu,n}(\cos\theta)\right) = \frac{2}{n}\cdot\cos(n\theta),\quad n \geqq 1. \tag{8}$$

Cela posé, il est évident que la formule § 18, (3) donnera, en vertu de (5) et (8), ces deux développements élémentaires très connus:

$$\sin(n+1)\theta = \sin\theta\cdot\sum_{s=0}^{\leqq\frac{n}{2}} (-1)^s\binom{n-s}{s}(2\cos\theta)^{n-2s} \tag{9}$$

$$\cos(n\theta) = \frac{n}{2} \cdot \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s}{n-2s} \cdot \binom{n-s-1}{s} (2\cos\theta)^{n-2s}. \tag{10}$$

Revenons maintenant à la formule générale (2), puis mettons-y ρ au lieu de ν, une multiplication des deux séries infinies ainsi obtenues donnera immédiatement l'identité nouvelle:

$$P^{\nu+\rho,\, n}(x) = \sum_{s=0}^{s=n} P^{\nu,\, s}(x) \cdot P^{\rho,\, n-s}(x), \tag{11}$$

d'où pour $\rho = 1$ et $x = \cos\theta$:

$$P^{\nu+1,\, n}(\cos\theta) = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{\sin(n-s+1)\,\theta}{\sin\theta} \cdot P^{\nu,\, s}(\cos\theta), \tag{12}$$

tandis que l'hypothèse $\nu = \rho = \frac{1}{2}$ donnera de même:

$$\frac{\sin(n+1)\,\theta}{\sin\theta} = \sum_{s=0}^{s=n} P^s(\cos\theta)\, P^{n-s}(\cos\theta)\,; \tag{13}$$

posons enfin dans (11) $\rho = -\nu$, il résulte:

$$0 = \sum_{s=0}^{s=n} P^{-\nu,\, s}(x)\, P^{\nu,\, n-s}(x). \tag{14}$$

Pour donner une autre application de (2) mettons-y $-x$ au lieu de x, puis appliquons l'identité

$$(1-2\alpha x+\alpha^2)(1+2\alpha x+\alpha^2) = 1-2(2x^2-1)\,\alpha^2+\alpha^4,$$

la multiplication des deux séries ainsi obtenues donnera la formule:

$$\sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s P^{\nu,\, s}(x)\, P^{\nu,\, n-s}(x) = \begin{cases} 0 \\ P^{\nu,\, \frac{n}{2}}(2x^2-1), \end{cases} \tag{15}$$

selon que n est supposé impair ou pair; mettons ensuite dans (15) $x = \cos\theta$, il résulte la formule remarquable:

$$P^{\nu,\, n}(\cos 2\theta) = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \varepsilon_{n-s} \cdot P^{\nu,\, s}(\cos\theta)\, P^{\nu,\, 2n-s}(\cos\theta), \tag{16}$$

où il faut admettre $\varepsilon_0 = 1$ et généralement $\varepsilon_s = 2$, pour $s \geq 1$.

§ 21. La formule différentielle d'Euler dite de Rodrigues.

Les formules différentielles que nous venons de développer dans le § 5 se présentent sous une forme extrêmement élégante dans le cas particulier où les fonctions métasphériques se réduisent à des fonctions ultrasphériques.

En effet, mettons dans § 5, (17) $\rho = p = n$, il résulte, en vertu de § 18, (4), cette formule célèbre, due à JACOBI [1]):

$$D_x[(1-x^2)^{\nu+n-\frac{1}{2}}] = \frac{(-1)^n n!\ \Gamma(\nu)\ \Gamma(2n+2\nu)}{2^n\, \Gamma(\nu+n)\ \Gamma(n+2\nu)} \cdot (1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cdot P^{\nu,n}(x), \quad (1)$$

dont le cas particulier $\rho = \frac{1}{2}$ a été connu déjà par EULER comme l'a remarqué IMSCHENETSKY [2]); la même formule particulière a été déduite plus tard par RODRIGUES, IVORY et JACOBI [3]).

Or, il semble que la remarque d'IMSCHENETSKY concernant la priorité d'EULER soit restée inaperçue jusqu'ici. En effet, dans son excellente monographie sur les fonctions sphériques, M. WANGERIN [4]) attribue à RODRIGUES la formule particulière susdite.

Supposons maintenant réel le paramètre ν, le théorème généralisé de ROLLE donnera cette proposition intéressante:

Tous les n zéros de la fonction ultrasphérique $P^{\nu,n}(x)$, dont le paramètre ν est réel et de sorte que $\nu \geq \frac{1}{2}$, sont réels et situés entre les limites $+1$ et -1.

Posons ensuite dans (1) $\nu = 1$ et $n-1$ au lieu de n, il résulte, en vertu de § 20, (5), cette formule célèbre due à JACOBI [5]):

$$D_x^{n-1}[(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}] = \frac{(-1)^{n-1} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots . (2n-1)}{n} \cdot \sin(n \arccos x). \quad (2)$$

Quant à la formule § 5, (18), les hypothèses $\rho = p = n$ donnent ici ce résultat plus particulier:

$$D_x^n[(x^2-1)^{\nu+n-\frac{1}{2}} \cdot Q^{\nu+n,0}(x)] = \frac{(-2)^n \cdot n!\ \Gamma(2\nu+2n)}{\Gamma(n+2\nu)} \cdot (x^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}} \cdot Q^{\nu,n}(x), \quad (3)$$

d'où, en vertu de la formule intégrale obtenue de § 7, (7) en y mettant $\rho = 0$, $\nu + n$ au lieu de ν et tx au lieu de t, cette autre formule [6]):

$$Q^{\nu,n}(x) = \frac{(-1)^n \sqrt{\pi}\ \Gamma(2\nu+n)}{2^n \cdot n!\ \Gamma(\nu+n)\,(x^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}} \cdot D_x^n\left[(x^2-1)^{\nu+n-\frac{1}{2}} \cdot \int_x^\infty \frac{dt}{(t^2-1)^{\nu+n+\frac{1}{2}}}\right]. \quad (4)$$

Remarquons en passant que la formule différentielle § 6, (10) donnera, en vertu de § 18, (9), cette autre identité:

$$D_x^{n+1} Q^{\nu,n}(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \cdot \frac{\sqrt{\pi}\ \Gamma(2\nu+2n+2)}{\Gamma(\nu+n+1)} \cdot (x^2-1)^{-\nu-n-\frac{1}{2}}, \quad (5)$$

formule qui peut être considérée comme l'inversion de la formule intégrale § 7, (7).

Quant aux invariants du § 5, la formule (10) est la seule qui donnera pour les fonctions ultrasphériques un résultat remarquable; nous aurons:

[1]) HEINE: Handbuch, t. I, p. 452; 1878.
[2]) Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, t. 14, p. 253; 1882.
[3]) HEINE loc. cit. p. 157.
[4]) Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, t. II, p. 703; 1904.
[5]) Journal de Crelle, t. 15; 1836.
[6]) Comparer, pour $\nu = \frac{1}{2}$, HEINE, Handbuch, t. I, p. 150; 1878.

$$P^{\nu,n}(x) = \frac{2\Gamma(2\nu+n)\cos\nu\pi}{n!\,\Gamma(\nu)\sqrt{\pi}} \cdot (x^2-1)^{\frac{1}{2}-\nu} \cdot Q^{1-\nu,\,-n-1}(x), \tag{6}$$

d'où, à l'aide de cette identité différentielle,

$$D_x^{2n+1} Q^{\nu,n}(x) = \left(-\tfrac{1}{2}\right)^{2n+1} \cdot Q^{\nu+2n+1,\,-n-1}(x),$$

tirée directement de § 6, (10):

$$P^{\nu,n}(x) = -\frac{2^{2n+2}\cdot\Gamma(2\nu+n)\cdot\cos\nu\pi}{n!\,\Gamma(\nu)\sqrt{\pi}\cdot(x^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}} \cdot D_x^{2n+1} Q^{-\nu-2n,\,n}(x), \tag{7}$$

formule dont il est très facile d'établir l'inversion.

A cette effet, prenons pour point de départ cette intégrale définie:

$$I = \int_1^\infty D_t^n\left[(t^2x^2-1)^{-\nu-n-\frac{1}{2}}\right] \cdot (t-1)^{2n}\,dt,$$

où le chemin d'intégration est la partie correspondante de l'axe des nombres réels, tandis qu'il faut admettre $\Re(\nu) > 0$; des intégrations par parties donnent immédiatement:

$$I = \frac{(-1)^n(2n)!}{n!\,x^n} \cdot \int_1^\infty (t^2x^2-1)^{-\nu-n-\frac{1}{2}} \cdot (t-1)^n\,dt,$$

d'où, en vertu de (1) et la formule intégrale § 7, (7), cette nouvelle expression intégrale:

$$\left.\begin{aligned} Q^{\nu,n}(x) = \frac{(-1)^n\sqrt{\pi}\cdot n!\,n!\,\Gamma(1+2\nu+3n)}{2^{2n+1}\cdot n!\,n!\,\Gamma(1+\nu+2n)} \cdot x^{n+1} \cdot \\ \cdot \int_1^\infty P^{-\nu-2n,\,n}(tx)\,(t^2x^2-1)^{-\nu-2n-\frac{1}{2}} \cdot (t-1)^{2n}\,dt \end{aligned}\right\}, \tag{8}$$

qui est précisément l'inversion de (7).

§ 22. Sur l'intégrale définie $\int_{-1}^{+1} P^{\nu,n}(x)\,P^{\nu,r}(x)\,(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dx$.

La formule différentielle § 21, (1) nous permet de déduire une formule intégrale très intéressante et fondamentale dans les recherches qui nous occupent ici.

A cet effet, prenons pour point de départ l'intégrale définie

$$\left.\begin{aligned} I = \int_{-1}^{+1} f(x)\,P^{\nu,n}(x)\,(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{(-2)^n\,\Gamma(n+\nu)\,\Gamma(n+2\nu)}{n!\,\Gamma(\nu)\,\Gamma(2n+2\nu)} \cdot \\ \cdot \int_{-1}^{+1} f(x)\,D_x^n\left[(1-x^2)^{\nu+n-\frac{1}{2}}\right]dx \end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

puis intégrons n fois par parties, nous aurons immédiatement la formule fondamentale susdite, savoir:

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,P^{\nu,n}(x)\,(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2^n\,\Gamma(\nu+n)\,\Gamma(2\nu+n)}{n!\,\Gamma(\nu)\,\Gamma(2n+2\nu)} \cdot \int_{-1}^{+1} f^{(n)}(x)\,(1-x^2)^{n+\nu-\frac{1}{2}}\,dx, \tag{2}$$

de laquelle nous avons à déduire une suite d'autres résultats, dont la plupart sont très connus mais démontrés à l'aide de procédés très différents.

1°. $\nu = 0$, $x = \cos\theta$; un simple calcul nous conduira à cette formule remarquable due à JACOBI[1]):

$$\int_0^\pi f(\cos\theta)\cos(n\theta)\,d\theta = \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\ldots\ldots(2n-1)}\cdot\int_0^\pi f^{(n)}(\cos\theta)(\sin\theta)^{2n}\,d\theta. \qquad (3)$$

2°. $\nu = 1$, $x = \cos\theta$ et $n-1$ au lieu de n; nous obtenons la formule

$$\int_0^\pi f(\cos\theta)\sin(n\theta)\cos\theta\,d\theta = \frac{n}{1\cdot 3\cdot 5\ldots\ldots(2n-1)}\cdot\int_0^\pi f^{(n-1)}(\cos\theta)(\sin\theta)^{2n}\,d\theta \qquad (4)$$

qui est analogue à celle de JACOBI.

3°. La formule (2) donnera immédiatement ce théorème essentiel:

Supposons que $f(x)$ soit un polynôme entier de x d'un degré égal à $n-1$ au plus, la valeur de l'intégrale (1) *est égale à zéro.*

4°. Posons particulièrement $f(x) = P^{\nu, r}(x)$, nous aurons:

$$D_x^r\, P^{\nu, r}(x) = \frac{2^r\cdot\Gamma(r+\nu)}{\Gamma(\nu)},$$

d'où, en vertu de (2), cette formule singulière:

$$\int_{-1}^{+1} P^{\nu, n}(x)\,P^{\nu, r}(x)\,(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dx = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{\pi\,\Gamma(n+2\nu)}{2^{2\nu-1}\cdot(\nu+n)\cdot n!\,(\Gamma(\nu))^2} \end{cases}, \qquad (5)$$

selon que $r \gtrless n$ ou $r = n$; le cas particulier $\nu = \frac{1}{2}$ appartient à LEGENDRE[2]).

5°. Mettons dans (5) $\nu = 0$, $x = \cos\theta$, il en résulte la formule d'EULER:

$$\int_0^\pi \cos(n\theta)\cos(r\theta)\,d\theta = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{\pi}{2} \end{cases}, \qquad (6)$$

tandis que l'hypothèse $\nu = 1$, $x = \cos\theta$ donnera de même:

$$\int_0^\pi \sin(n\theta)\sin(r\theta)\,d\theta = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{\pi}{2} \end{cases}, \qquad (7)$$

formule qui est également due à EULER.

6°. Supposons que la série infinie ou finie

$$f(x) = \Gamma(\nu)\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty} a_s\cdot P^{\nu, s}(x) \qquad (8)$$

soit convergente dans l'intervalle $-1 < x < +1$ et intégrable terme à terme de $x = -1$ à $x = +1$, il résulte, en vertu de (5), cette détermination du coefficient général a_n:

[1]) Journal de Crelle, t. 15; 1836.

[2]) Histoire de l'Académie de Paris 1784, p. 373 et 1789, p. 384.

$$\int_{-1}^{+1} f(x) P^{\nu, n}(x)(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dx = \frac{\pi \Gamma(n+2\nu)}{2^{2\nu-1}(\nu+n)\, n!\, \Gamma(\nu)} \cdot a_n, \tag{9}$$

d'où, en vertu de (2), cette autre expression:

$$a_n = \frac{2^{n+2\nu-1} \Gamma(\nu+n+1)}{\pi \Gamma(2\nu+2n)} \cdot \int_{-1}^{+1} f^{(n)}(x)(1-x^2)^{\nu+n-\frac{1}{2}} dx. \tag{10}$$

Posons par exemple $f(x) = x^n$, une représentation de la forme (8) est évidemment possible, et la série correspondante deviendra finie en se composant des $n+1$ premiers termes seulement; appliquons (10), et des propriétés très connues de la fonction gamma et de l'intégrale *eulérienne* de première espèce, il résultera la formule cherchée:

$$x^n = \frac{n!\, \Gamma(\nu)}{2^n} \cdot \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{n-2s+\nu}{s!\, \Gamma(\nu+n-s+1)} \cdot P^{\nu, n-2s}(x) \tag{11}$$

qui peut être déduite immédiatement aussi à l'aide de § 17, (8).

7°. Considérons encore la formule § 19, (4), puis remarquons que le produit $L^{\nu, n}(x) \cdot P^{\nu, n}(x)$ est une fonction *impaire* de x, la formule (5) donnera ce théorème qui est nouveau, je crois:

Supposons $\Re(\nu) > -\frac{1}{2}$, *puis désignons par* n *et* p *deux nombres entiers, nous aurons:*

$$\int_{-1}^{+1} Q^{\nu, n}(x) \cdot P^{\nu, n+2p}(x)(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dx = \begin{cases} 0 \\ \dfrac{(-1)^n \sqrt{\pi^3}\, \Gamma(n+2\nu)}{(2\nu+2n) \cdot n!\, \Gamma(\nu)} \cdot e^{\mp \nu \pi i}, \end{cases} \tag{12}$$

selon que $p \gtrless 0$ *ou* $p = 0$.

En effet, nous savons, en vertu de § 7, (11) et § 19, (4), que les deux integrales définies

$$\int_{-1}^{+1} Q^{\nu, n}(x) \cdot P^{\nu, n+2p}(x)(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dx, \quad \int_{-1}^{+1} L^{\nu, n}(x) \cdot P^{\nu, n+2p}(x)(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dx$$

ont un sens toutes les deux avec la restriction susdite concernant la valeur du paramètre ν.

Or, l'existence de notre formule (12) montre clairement que la coupure de Heine qui supprime notre chemin d'intégration n'est pas admissible.

§ 23. Développements divers de $P^{\nu, n}(\cos \theta)$.

Pour mettre en pleine lumière la propriété que possède la fonction ultrasphérique $P^{\nu, n}(\cos \theta)$ d'être une généralisation des fonctions trigonométriques, il nous paraît utile de réunir dans un paragraphe particulier les développements divers de cette fonction qui peuvent être déduits des formules générales que nous venons d'établir dans le *Chapitre II* de ce Mémoire.

1°. La formule § 11, (11) donnera pour $x = i \sin\theta$ ce développement:

$$P^{\nu, 2n}(\cos\theta) = \frac{(-1)^n 2^{2n} \cdot \Gamma(\nu+2n)(\sin\theta)^{2n}}{\Gamma(\nu)(2\nu)!} \cdot F\left(-n, -\nu-n+\frac{1}{2}, 1-\nu-2n, \frac{1}{\sin^2\theta}\right), \quad (1)$$

d'où il résulte pour $\nu = 0$, $\nu = 1$ les deux formules plus particulières

$$\cos(2n\theta) = (-1)^n 2^{2n}(\sin\theta)^{2n} \cdot F\left(-n, -n+\frac{1}{2}, 1-2n, \frac{1}{\sin^2\theta}\right) \quad (2)$$

$$\sin(2n+1)\theta = (-1)^n 2^{2n}(\sin\theta)^{2n+1} \cdot F\left(-n, -n-\frac{1}{2}, -2n, \frac{1}{\sin^2\theta}\right). \quad (3)$$

2°. Posons dans § 12, (5) $x = e^{i\theta}$, puis remarquons que les coefficients aux indices p et $n-p$ de la série hypergéométrique qui figure au second membre sont égaux, nous aurons sans peine la formule

$$P^{\nu, n}(\cos\theta) = \frac{1}{(\Gamma(\nu))^2} \cdot \sum_{s=0}^{s=n} \frac{\Gamma(\nu+s)\,\Gamma(\nu+n-s)}{s!\,(n-s)!} \cdot \cos(n-2s)\,\theta, \quad (4)$$

d'où, en posant $\nu = 1$, la formule élémentaire très connue:

$$\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} = \sum_{s=0}^{s=n} \cos(n-2s)\,\theta. \quad (5)$$

3°. La formule § 13, (8) donnera dans ce cas particulier

$$(x^2+1)^n \cdot P^{\nu, n}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \frac{\Gamma(n+2\nu)}{n!\,\Gamma(2\nu)} \cdot F\left(-n, -n-\nu+\frac{1}{2}, \nu+\frac{1}{2}, -x^2\right), \quad (6)$$

d'où, en mettant $x = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\theta$

$$P^{\nu, n}(\cos\theta) = \frac{\Gamma(n+2\nu)\left(\cos\frac{1}{2}\theta\right)^{2n}}{n!\,\Gamma(2\nu)} \cdot F\left(-n, -n-\nu+\frac{1}{2}, \nu+\frac{1}{2}, -\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\theta\right), \quad (7)$$

formule dont le cas particulier $\nu = \frac{1}{2}$ appartient à Murphy; posons encore $\nu = 0$, il résulte:

$$\cos(n\theta) = \left(\cos\frac{1}{2}\theta\right)^{2n} \cdot F\left(-n, -n+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\theta\right), \quad (8)$$

tandis que l'hypothèse $\nu = 1$ donnera de même:

$$\frac{\sin(n+1)\theta}{(\sin\theta)} = (n+1)\left(\cos\frac{1}{2}\theta\right)^{2n} \cdot F\left(-n, -n-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\theta\right). \quad (9)$$

4°. Appliquons ensuite les formules § 14, (6), (12), nous aurons respectivement:

$$P^{\nu, n}(\sqrt{1-x}) = \frac{\Gamma(n+2\nu)}{n!\,\Gamma(2\nu)} \cdot F\left(-\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+\nu, \nu+\frac{1}{2}, x\right) \quad (10)$$

$$\frac{P^{\nu, n}(\sqrt{1-x})}{\sqrt{1-x}} = \frac{\Gamma(n+2\nu)}{n!\,\Gamma(2\nu)} \cdot F\left(\frac{1-n}{2}, \frac{1+n}{2}+\nu, \nu+\frac{1}{2}, x\right), \quad (11)$$

d'où pour $x = \sin^2\theta$:

$$P^{\nu,n}(\cos\theta) = \frac{\Gamma(n+2\nu)}{n!\,\Gamma(2\nu)} \cdot F\left(-\frac{n}{2},\ \frac{n}{2}+\nu,\ \nu+\frac{1}{2},\ \sin^2\theta\right) \tag{12}$$

$$P^{\nu,n}(\cos\theta) = \frac{\Gamma(n+2\nu)\cos\theta}{n!\,\Gamma(2\nu)} \cdot F\left(\frac{1-n}{2},\ \frac{1+n}{2}+\nu,\ \nu+\frac{1}{2},\ \sin^2\theta\right), \tag{13}$$

de sorte que les hypothèses $\nu=0$, $\nu=1$ donnent ces deux groupes de développements classiques:

$$\cos(n\theta) = F\left(-\frac{n}{2},\ \frac{n}{2},\ \frac{1}{2},\ \sin^2\theta\right) \tag{14}$$

$$\cos(n\theta) = \cos\theta \cdot F\left(\frac{1-n}{2},\ \frac{1+n}{2},\ \frac{1}{2},\ \sin^2\theta\right) \tag{15}$$

$$\sin(n+1)\theta = (n+1)\sin\theta \cdot F\left(-\frac{n}{2},\ \frac{n}{2}+1,\ \frac{3}{2},\ \sin^2\theta\right) \tag{16}$$

$$\sin(n+1)\theta = (n+1)\sin\theta\cos\theta \cdot F\left(\frac{1-n}{2},\ \frac{3+n}{2},\ \frac{3}{2},\ \sin^2\theta\right) \tag{17}$$

5°. Remarquons enfin que les formules § 18, (6) et § 6, (9) donnent immédiatement ce développement en série de Taylor:

$$P^{\nu,n}(1+x) = \frac{\Gamma(n+2\nu)}{n!\,\Gamma(2\nu)} \cdot F\left(-n,\ n+2\nu,\ \nu+\frac{1}{2},\ -\frac{x}{2}\right), \tag{18}$$

il résulte, pour $x = -2\sin^2\frac{1}{2}\theta$, la formule nouvelle:

$$P^{\nu,n}(\cos\theta) = \frac{\Gamma(n+2\nu)}{n!\,\Gamma(2\nu)} \cdot F\left(-n,\ n+2\nu,\ \nu+\frac{1}{2},\ \sin^2\frac{1}{2}\theta\right), \tag{19}$$

d'où pour $\nu=0$, $\nu=1$ les deux formules (14) et (16) qui correspondent à une valeur paire de n.

CHAPITRE IV.

Les séries neumanniennes.

§ 24. Développement de Heine pour $1:(y-x)$.

Dans le § 20 nous avons développé une série de puissances particulière selon des fonctions P; pour étudier le développement analogue d'une série de puissances générale, nous avons tout d'abord à développer dans une telle série la fonction

$$\frac{1}{y-x} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{x^s}{y^{s+1}}, \quad |x| < |y|. \tag{1}$$

A cet effet, appliquons à tous les termes du second membre de (1) la formule § 22, (11), nous aurons une série à double entrée Δ. Or, supposons pour un instant qu'il soit permis de ranger les termes de Δ de sorte que nous réunissions tous les termes qui contiennent la même fonction ultrasphérique $P^{\nu, n}(x)$, il résulte un développement de cette forme:

$$\frac{1}{y-x} = \frac{2^{2\nu}\,\Gamma(\nu)}{\sqrt{\pi}} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} (s+\nu)\, Q^{1-\nu,\, 2\nu+s-1}(y) \cdot P^{\nu, s}(x). \tag{2}$$

Pour démontrer maintenant d'une manière rigoureuse la formule (2), mettons

$$\xi = x \pm \sqrt{x^2-1}\,, \quad \eta = y \pm \sqrt{y^2-1}\,, \tag{3}$$

où ξ et η sont à déterminer de sorte que $|\xi| > 1$, $|\eta| > 1$; les formules démontrées dans les §§ 12, 16 donnent immédiatement cette proposition fondamentale dans les recherches qui nous occupent ici:

La série infinie qui figure au second membre de (2) *est absolument convergente, pourvu que* $|\xi| > 1$, $|\eta| > 1$ *et* $|\xi| < |\eta|$.

Cela posé, nous avons à déterminer la somme de cette série absolument convergente.

A cet effet, mettons $y = 1 : z$ et différentions $n+1$ fois par rapport à z la série ainsi obtenue, ce qui est permis; nous obtenons en mettant ensuite $x = 0$ précisément l'expression qui figure au second membre de § 22, (11), c'est-à-dire la puissance x^n; telle est la démonstration rigoureuse de la formule (2).

Posons particulièrement dans (2) $\nu = \frac{1}{2}$; la formule ainsi obtenue est due à Heine[1]; dans le § 27 nous avons à donner une généralisation remarquable de (2).

Considérons ici quelques autres cas particuliers de (2); posons d'abord $\nu = 0$, il résulte:

$$\frac{1}{y-x} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \varepsilon_s \cdot Q^{1, s-1}(y) \cdot \cos(sx)\,, \tag{4}$$

où il faut admettre $\varepsilon_0 = 1$ mais généralement, pour $s > 0$, $\varepsilon_s = 2$.

L'hypothèse $\nu = 1$ donnera de même cette formule analogue:

$$\frac{\sin x}{y-x} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} (s+1) \cdot Q^{0,\, s+1}(y) \cdot \sin(s+1)\,x. \tag{5}$$

§ 25. Théorème général de C. Neumann.

Considérons maintenant une fonction $f(x)$ qui est holomorphe à l'intérieur de l'ellipse, pour $x = \xi + i\eta$,

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{a^2-1} = 1 \tag{1}$$

qui a ses foyers dans les points $(\pm 1, 0)$, et dont la circonférence prise dans le sens direct est désignée par $\mathfrak{C}$; le théorème fondamental de Cauchy donnera:

[1]) Handbuch, t. I, p. 197.

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int\limits_{\mathfrak{C}} \frac{f(y)}{y-x}\, dy. \tag{2}$$

Cela posé, introduisons dans l'intégrale curviligne qui figure au second membre de (2) le développement § 24, (2), il résulte une série de cette forme:

$$f(x) = \Gamma(\nu) \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} (s+\nu) A_s \cdot P^{\nu, s}(x) \tag{3}$$

qui est convergente à l'intérieur de l'ellipse (1), tandis qu'il faut admettre:

$$A_n = \frac{2^{2\nu}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \cdot \int\limits_{\mathfrak{C}} Q^{1-\nu,\, n+2\nu-1}(y)\, f(y)\, dy. \tag{4}$$

Appliquons ensuite la formule intégrale § 22, (5), il résulte, en vertu de (3), pour A_n cette autre expression:

$$A_n = \frac{n!\, \Gamma(\nu)\, 2^{2\nu-1}}{\pi \cdot \Gamma(n+2\nu)} \cdot \int\limits_{-1}^{+1} f(x)\, P^{\nu, n}(x)\, (1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\, dx, \tag{5}$$

ou bien, à l'aide de § 22, (2):

$$A_n = \frac{2^{2\nu+n-1} \cdot \Gamma(\nu+n)}{\pi \cdot \Gamma(2n+2\nu)} \cdot \int\limits_{-1}^{+1} f^{(n)}(x)\, (1-x^2)^{\nu+n-\frac{1}{2}}\, dx. \tag{6}$$

Il est évident qu'il faut admettre généralement dans (5) et (6) que $\Re(\nu) > -\frac{1}{2}$.

Ces résultats obtenus, nous avons démontré ce théorème général de C. Neumann[1]):

Supposons holomorphe à l'intérieur de l'ellipse (1) *la fonction* $f(x)$, *les formules* (3), (4), (5) *et* (6) *nous donnent le développement de* $f(x)$ *en série de fonctions* $P^{\nu, n}(x)$, *série qui est convergente à l'intérieur de l'ellipse susdite.*

Considérons encore particulièrement le cas, où $f(x)$ est holomorphe à l'intérieur du cercle $|x| = \rho$, $\rho > 1$, puis mettons:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots, \quad |x| < \rho \tag{7}$$

la formule (4) donnera immédiatement pour le coefficient général A_n cette expression

$$A_n = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(n+2s)!\, a_{n+2s}}{2^{n+2s} \cdot s!\, \Gamma(\nu+n+s+1)}. \tag{8}$$

Inversement, supposons convergente la série (3), nous aurons une série de puissances de la forme (7), où le coefficient général a_n se détermine comme suit

$$a_n = \frac{2^n\, \Gamma(\nu+n)}{n!} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \binom{\nu+n+s-1}{s} \cdot (\nu+n+2s) \cdot A_{n+2s}, \tag{9}$$

série qui est convergente à l'intérieur du cercle $|x| = a^2 - 1$, pourvu que l'ellipse (1) soit l'ellipse de convergence de la série (3).

[1]) Ueber die Entwicklung einer Funktion mit imaginärem Argument nach den Kugelfunktionen erster und zweiter Art, p. 10; Halle 1862.

Considérons par exemple la fonction

$$f(x) = \frac{1}{1+4x^2};$$

l'ellipse (1) correspondante a l'équation

$$\frac{\xi^2}{5} + \frac{\eta^2}{1} = 4,$$

et cet exemple montre clairement que le théorème de NEUMANN n'est pas applicable seulement pour les séries de puissances (7) mais qu'il a une portée beaucoup plus étendue.

Considérons encore la fonction exponentielle; il en résulte cette série *neumannienne:*

$$e^{\alpha x i} = \Gamma(\nu)\left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\nu} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} i^s (\nu+s) J^{\nu+s}(\alpha) \cdot P^{\nu,s}(x) \tag{10}$$

qui est convergente pour des valeurs finies quelconques de α et x.

La formule générale (10) appartient à feu M. GEGENBAUER[1]), tandis que les cas particuliers $\nu = 0$, $\nu = \frac{1}{2}$ ont été trouvés respectivement par JACOBI[1]) et par M. BAUER[1]).

§ 26. Développement de $P^{\rho,n}(\alpha x)$.

Comme première application du théorème général que nous venons de démontrer, nous avons à considérer la série finie obtenue, en vertu de § 24, (8), pour le polynôme $P^{\rho,n}(\alpha x)$. Nous aurons immédiatement:

$$\left.\begin{aligned} P^{\rho,n}(\alpha x) = \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\rho)} \cdot \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} (-1)^s (\nu+n-2s) \cdot \frac{\Gamma(\rho+n-s)}{s!\,\Gamma(\nu+n-2s+1)} \cdot \alpha^{n-2s} \cdot \\ \cdot F(\rho+n-s, -s, \nu+n-2s+1, \alpha^2) \cdot P^{\nu,n-2s}(x), \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

où F désigne la série hypergéométrique ordinaire.

Posons particulièrement dans (1) $\alpha = 1$; la formule de GAUSS

$$F(\alpha,\beta,\gamma,1) = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)}$$

donnera cette formule élégante, que je crois nouvelle:

$$P^{\rho,n}(x) = \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\rho)} \cdot \sum_{s=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s(\nu+n-2s)\,\Gamma(\rho+n-s)}{\Gamma(\nu+n-s+1)} \cdot \binom{\nu-\rho}{s} \cdot P^{\nu,n-2s}(x) \tag{2}$$

et dont on peut déduire une suite d'autres formules plus particulières parmi lesquelles nous avons à étudier les suivantes:

[1]) Voir mon Handbuch der Zylinderfunktionen, p. 277; 1904.

1°. $\rho = \nu + p$, *où p désigne un positif entier.* La formule différentielle § 6, (9) donnera immédiatement:

$$D_x^p\, P^{\nu,\, n+p}(x) = 2^p \cdot \sum_{s=0}^{\leqq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s(\nu+n-2s)\cdot\Gamma(\nu+n+p-s)}{\Gamma(\nu+n-s+1)} \cdot \binom{-p}{s} \cdot P^{\nu,\, n-2s}(x), \quad (3)$$

dont le cas particulier $\nu = \frac{1}{2}$, $p = 1$ appartient à CHRISTOFFEL[1]).

2°. $\rho = 0$ ou $\rho = 1$. Les formules § 20, (5) et (7) donnent respectivement ces deux développements intéressants:

$$\frac{2\cos(n\theta)}{n} = \Gamma(\nu) \cdot \sum_{s=0}^{\leqq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s(\nu+n-2s)(n-s-1)!}{\Gamma(\nu+n-s+1)} \cdot \binom{\nu}{s} \cdot P^{\nu,\, n-2s}(\cos\theta) \quad (4)$$

$$\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} = \Gamma(\nu) \cdot \sum_{s=0}^{\leqq \frac{n}{2}} \frac{(-1)^s(\nu+n-2s)(n-s)!}{\Gamma(\nu+n-s+1)} \cdot \binom{\nu-1}{s} \cdot P^{\nu,\, n-2s}(\cos\theta), \quad (5)$$

dont le cas particulier $\nu = \frac{1}{2}$ était connu déjà par LEGENDRE[2]) et LAPLACE[3]); posons encore dans (5) $\nu = 0$, il résulte une formule élémentaire très connue.

3°. $\nu = 0$, $\nu = 1$. Pour obtenir les formules inverses de (4) et (5) mettons dans (2) $\nu = 0$ ou $\nu = 1$, ce qui donnera respectivement:

$$P^{\rho,\, n}(\cos\theta) = (-1)^n \cdot \sum_{s=0}^{\leqq \frac{n}{2}} \varepsilon_{n-2s} \cdot \binom{-\rho}{s}\binom{-\rho}{n-s} \cdot \cos(n-2s)\,\theta \quad (6)$$

$$P^{\rho,\, n}(\cos\theta)\sin\theta = (-1)^n \cdot \sum_{s=0}^{\leqq \frac{n}{2}} \frac{n-2s+1}{n-s+1} \cdot \binom{-\rho}{s}\binom{1-\rho}{n-s} \cdot \sin(n-2s+1)\,\theta; \quad (7)$$

dans (6) il faut admettre comme ordinairement $\varepsilon_0 = 1$, mais généralement $\varepsilon_s = 2$, pour $s > 0$.

§ 27. Développement de $(a+bx)^{-\rho}$.

Pour donner une autre application du théorème général de C. NEUMANN, considérons cette série de puissances:

$$(a+bx)^{-\rho} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \binom{-\rho}{s} a^{-\rho-s} \cdot b^s x^s, \quad (1)$$

[1]) Thèse de doctorat; Berlin 1856.
[2]) Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, t. II, p. 702; 1904.
[3]) Id.

où il faut admettre $|b| > |a|$, de sorte que l'ellipse de convergence de la série *neumannienne* correspondante a son plus grand axe égal à

$$\frac{1}{2}\left(\left|\frac{b}{a}\right| + \left|\frac{a}{b}\right|\right),$$

tandis que le coefficient général de la série susdite

$$(a+bx)^{-\rho} = \Gamma(\nu) \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} (s+\nu) A_s \cdot P^{\nu,s}(x) \tag{2}$$

se détermine comme il suit:

$$A_p = a^{-\rho} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(p+2s)!\binom{-\rho}{p+2s}}{s!\,\Gamma(\nu+p+s+1)\,2^{p+2s}} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{p+2s}$$

ou, ce qui est la même chose:

$$A_p = \frac{(-1)^p a^{-\rho} \cdot \rho(\rho+1)\ldots(\rho+p-1)}{2^p \cdot \Gamma(\nu+p+1)} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^p \cdot F\left(\frac{p+\rho}{2}, \frac{p+\rho+1}{2}, \nu+p+1, \frac{b^2}{a^2}\right), \tag{3}$$

d'où, pourvu que ρ ne soit pas égal à zéro ou à un négatif entier:

$$A_p = \frac{(-1)^p a^{-\rho-p} b^p \,\Gamma(\rho+p)}{\Gamma(\rho)\,\Gamma(\nu+p+1)\,2^p} \cdot F\left(\frac{p+\rho}{2}, \frac{p+\rho+1}{2}, \nu+p+1, \frac{b^2}{a^2}\right);$$

appliquons ensuite la formule § 5, (6), il résulte finalement cette formule élégante:

$$(a+bx)^{-\rho} = \frac{2^{2\nu-\rho}\,\Gamma(\nu)}{\Gamma(\rho)\sqrt{\pi}\,b^\rho} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s (2\nu+2s)\, Q^{\rho-\nu,\, 2\nu-\rho+s}\left(\frac{a}{b}\right) \cdot P^{\nu,s}(x) \tag{4}$$

qui nous permet de déduire immédiatement d'autres formules plus particulières que l'on démontre ordinairement en suivant des méthodes très différentes et peu systématiques. Nous avons à considérer ici les cas particuliers suivants de (4):

1°. $a = y$, $b = -1$; il résulte la formule intéressante:

$$\frac{1}{(y-x)^\rho} = \frac{2^{2\nu}\,\Gamma(\nu)}{\Gamma(\rho)\sqrt{\pi}} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} (\nu+s)\, Q^{\rho-\nu,\, 2\nu-\rho+s}(y) \cdot P^{\nu,s}(x), \tag{5}$$

due à Gegenbauer[1]); l'hypothèse $\rho = 1$ nous conduira à la formule § 24, (2) de Heine, tandis que l'hypothèse $\rho = 2\nu$ nous conduira à une autre formule intéressante.

2°. $b = \sqrt{a^2-1}$, $\rho = -n$, *où* n *désigne un positif entier*. Ici nous avons à appliquer la formule (3), ce qui donnera:

$$A_p = \frac{a^{n-p}(a^2-1)^{\frac{p}{2}} \cdot n!}{(n-p)!\,\Gamma(\nu+p+1)\,2^p} \cdot F\left(\frac{p-n}{2}, \frac{p-n+1}{2}, \nu+p+1, \frac{a^2-1}{a^2}\right),$$

d'où, en vertu de § 15, (5):

[1]) Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, t. 23, p. 513; 1891.

$$A_p = \frac{n!\,\Gamma\left(\nu+p+\frac{1}{2}\right)2^{2\nu+p}}{\sqrt{\pi}\cdot\Gamma(2\nu+n+p+1)}\cdot(a^2-1)^{\frac{p}{2}}\cdot P^{\nu+p+\frac{1}{2},\,n-p}(a),$$

de sorte que la formule différentielle § 6, (9) donnera immédiatement la formule cherchée [1]):

$$\left.\begin{aligned}(a+x\sqrt{a^2-1})^n = \frac{n!\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\nu)\,2^{2\nu}}{\sqrt{\pi}}\cdot\sum_{s=0}^{s=n}\frac{(\nu+s)\,(a^2-1)^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(2\nu+n+s+1)}\,\cdot\\ \cdot\, D_a^s\,P^{\nu+\frac{1}{2},\,n}(a)\cdot P^{\nu,s}(x),\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

d'où pour $\nu=0$, $x=\cos\varphi$ cette formule célèbre [2]):

$$(a+\cos\varphi\sqrt{a^2-1})^n = n!\sum_{s=0}^{s=n}\frac{\varepsilon_s\cdot(a^2-1)^{\frac{s}{2}}}{(n+s)!}\,D_a^s\,P^n(a)\,.\,\cos(s\varphi), \tag{7}$$

où il faut admettre $\varepsilon_0 = 1$, mais généralement pour $s \geqq 1$, $\varepsilon_s = 2$.

3°. $b=\sqrt{a^2-1}$, $\rho = -n-1+2\nu$, *où n désigne un positif entier.* La formule § 15, (5), donnera, en vertu de (4):

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{(a+x\sqrt{a^2-1})^{n+1-2\nu}} = \frac{n!\,\Gamma(\nu)(a^2-1)^{-\nu}}{(\Gamma(2\nu+n+1))^2}\cdot\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s(\nu+s)\,\Gamma(n+s+2\nu+1)}{(a^2-1)^{\frac{s}{2}}}\,\cdot\\ \cdot\, D_a^{-s}\,P^{\nu+\frac{1}{2},\,n}(a)\cdot P^{\nu,s}(x),\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

d'où, en mettant $\nu=0$, $x=\cos\varphi$, cette formule célèbre [3]):

$$\frac{n!}{(a+\cos\varphi\,.\,\sqrt{a^2-1})^{n+1}} = \sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s\,\varepsilon_s\,(n+s)!}{(a^2-1)^{\frac{s}{2}}}\cdot D_a^{-s}\,P^n(a)\cdot\cos(s\varphi), \tag{9}$$

où ε_s a la même signification que dans (7).

§ 28. Sur quelques formules intégrales.

Après avoir donné dans les paragraphes précédants une suite de séries *neumanniennes* plus particulières nous avons à appliquer à de telles séries l'expression intégrale § 25, (5) pour le coefficient général A_n, procédé que nous conduira immédiatement à des généralisations d'une suite de formules connues.

1°. La formule § 20, (2) donnera:

$$x^n = \frac{2^{2\nu-1}\cdot(\nu+n)\,(\Gamma(\nu))^2\,n!}{\pi\,\Gamma(n+2\nu)}\cdot\int_0^\pi\frac{P^{\nu,n}(\cos\varphi)\,(\sin\varphi)^{2\nu}}{(1-2x\cos\varphi+x^2)^\nu}\,d\varphi, \tag{1}$$

où il faut admettre $\Re(\nu)>0$.

[1]) Heine: Handbuch, t. I, p. 454; 1878.

[2]) loc. cit. p. 200.

[3]) loc. cit. p. 204.

2°. Appliquons la formule § 24, (10), il résulte pour la fonction cylindrique de prémières espèce cette représentation intégrale:

$$i^n \cdot J^{\nu+n}(x) = \frac{2^{2\nu-1}\,\Gamma(\nu)\,n!}{\pi\,\Gamma(n+2\nu)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} \cdot \int_0^{\pi} e^{ix\cos\varphi}\,P^{\nu,n}(\cos\varphi)\,(\sin\varphi)^{2\nu}\,d\varphi, \tag{2}$$

ce qui n'est autre chose qu'une généralisation de la formule célèbre de BESSEL[1]), obtenue de (2) en y mettant $n = 0$.

Il est à remarquer que M. O.-A. SMITH[2]) a donné récemment pour la même fonction cylindrique une expression intégrale de la même forme que (2) mais contenant la fonction $Q^{\nu,n}(\cos\varphi)$.

3°. Pour la fonction hypergéométrique particulière introduite dans la formule § 25, (1) nous aurons de la même manière cette expression intégrale:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\Gamma(\rho+n-s)\,x^{n-2s}}{(n-s)!\,\Gamma(\nu+n-2s)} \cdot F(\rho+n-s,\ -s,\ \nu+2n-2s+1,\ x^2) = \\ &= \frac{2^{2\nu-1}(n-2s)!\,\Gamma(\nu)\,\Gamma(\rho)}{\pi\,\Gamma(n+2\nu)} \cdot \int_0^{\pi} P^{\rho,n}(x\cos\varphi)\,P^{\nu,n-2s}(\cos\varphi)\,(\sin\varphi)^{2\nu}\,d\varphi. \end{aligned}\right| \tag{3}$$

4°. Appliquons ensuite la formule § 27, (5), il résulte pour la fonction métasphérique générale une expression de la forme

$$Q^{\rho-\nu,\,2\nu-\rho+n}(y) = \frac{n!\,\Gamma(\nu)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(n+2\nu)} \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{P^{\nu,n}(x)\,(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}}{(y-x)^{\rho}}\,dx, \tag{4}$$

ce qui donnera pour $\nu = \frac{1}{2}$, $\rho = 1$ l'intégrale de F.-E. NEUMANN[3]).

5°. La formule § 26, (6) donnera de même cette formule remarquable:

$$P^{\nu+\frac{1}{2},n}(x) = \frac{\Gamma(2\nu+n+1)}{n!\,\Gamma(\nu+1)\left(\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\right)^2} \cdot \int_0^{\pi} (x+\cos\varphi\cdot\sqrt{x^2-1})^n\,(\sin\varphi)^{2\nu}\,d\varphi, \tag{5}$$

d'où, pour $\nu = 0$, la célèbre formule de LAPLACE[4]).

6°. Nous avons encore à appliquer la série § 26, (7), d'où:

$$\frac{P^{\nu+\frac{1}{2},n}(x)}{(1-x^2)^{\nu}} = \frac{\Gamma(2\nu+n+1)}{\sqrt{\pi}\,n!\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\nu+1)} \cdot \int_0^{\pi} \frac{(\sin\varphi)^{2\nu}\,d\varphi}{(x+\cos\varphi\cdot\sqrt{x^2-1})^{n+1-2\nu}}, \tag{6}$$

ce qui donnera, pour $\nu = 0$, la formule de JACOBI[5]).

Cela posé, écrivons maintenant sous cette forme la formule (5):

[1]) Voir mon Handbuch der Zylinderfunktionen, p. 51; 1904.

[2]) Dans un mémoire qui paraîtra prochainement dans le Giornale di Matematiche.

[3]) Beiträge zur Theorie der Kugelfunktionen, p. 1; Leipzig 1878.

[4]) HEINE: Handbuch, t. I, p. 35; 1878.

[5]) loc. cit. p. 36.

$$\frac{t^n \cdot P^{\nu+\frac{1}{2},\, n}(x)}{\Gamma(2\nu+n+1)} = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)\left(\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\right)^2} \cdot \int_0^\pi \frac{\left(tx+t\cos\varphi\cdot\sqrt{x^2-1}\right)^n}{n!} \cdot (\sin\varphi)^{2\nu}\, d\varphi\,,$$

puis mettons-y successivement $n = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots..$, une addition de toutes les formules ainsi obtenues donnera, en vertu de (2), ce développement en série *neumannienne*:

$$\frac{\Gamma(2\nu+1)}{2^{2\nu}} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{t^s \cdot P^{\nu+\frac{1}{2},\, s}(x)}{\Gamma(2\nu+s+1)} = e^{-tx} \cdot J^\nu\left(t\sqrt{1-x^2}\right) \cdot \left(\frac{2}{t\sqrt{1-x^2}}\right)^\nu, \tag{7}$$

dont le cas particulier $\nu = 0$, $t = 1$ appartient à Catalan [1]).

Appliquons ensuite à la formule (7) la méthode précédente, il résulte cette autre représentation intégrale:

$$\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\cdot(\nu+1)} \cdot \int_0^\pi e^{-t\cos\varphi} J^\nu(t\sin\varphi)\, P^{\nu+\frac{1}{2},\, n}(\cos\varphi)\, d\varphi = \frac{t^{\nu+n}}{2^{3\nu}\cdot\left(\nu+n+\frac{1}{2}\right)\cdot n!}, \tag{8}$$

Combinons maintenant les formules (1) et (7), il en résultera cette autre:

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(tx)^s}{s!\,(2s+1)} = \frac{1}{2} \cdot \int_0^\pi \frac{e^{-t\cos\varphi} J^0(t\cos\varphi)\sin\varphi}{\sqrt{1-2x\cos\varphi+x^2}}\, d\varphi\,, \tag{9}$$

qui est, je crois, nouvelle.

L'analogie entre la série qui figure au premier membre de (9) et la célèbre fonction de Kramp:

$$K(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s x^{2s+1}}{s!\,(2s+1)} \tag{10}$$

saute aux yeux.

§ 29. Sur la série neumannienne obtenue pour $f(ax)$.

En terminant ces recherches, nous avons à développer encore quelques propriétés générales d'une série *neumannienne*.

A cet effet, supposons égal à r le rayon de convergence de la série de puissances

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots, \tag{1}$$

puis désignons par α une quantité finie telle que $|\alpha| < r$, nous aurons une série *neumannienne* de la forme suivante:

$$f(\alpha x) = \Gamma(\nu) \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} (\nu+s)\, A^{\nu,s}(\alpha) \cdot P^{\nu,s}(x) \tag{2}$$

qui est convergente à l'intérieur de l'ellipse

$$\frac{\xi^2}{\left(\frac{r}{2|\alpha|}+\frac{|\alpha|}{2r}\right)^2} + \frac{\zeta^2}{\left(\frac{r}{2|\alpha|}-\frac{|\alpha|}{2r}\right)^2} = 1\,, \tag{3}$$

[1]) Sur les fonctions X_n, p. 14. Mém. de l'Acad. de Belgique, t. 44; 1881.

et où nous avons posé pour abréger:

$$A^{\nu, n}(\alpha) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(n+2s)!\, a_{n+2s}}{s!\, \Gamma(\nu+n+s+1)} \cdot \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{n+2s} \tag{4}$$

ou bien, sous forme d'une intégrale définie:

$$A^{\nu, n}(\alpha) = \frac{2^{2\nu-2}\, n!\, \Gamma(\nu)}{\pi\, \Gamma(n+2\nu)} \cdot \int_{-1}^{+1} P^{\nu, n}(x) f(\alpha x) (1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}\, dx. \tag{5}$$

Cela posé, nous aurons aussi un développement de cette forme:

$$f(\alpha\beta x) = \Gamma(\rho) \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} (\rho+s) A^{\rho, s}(\alpha) P^{\rho, s}(\beta x), \tag{6}$$

convergente pourvu que $|\alpha| < r$ et que βx soit situé à l'intérieur de l'ellipse (3). Multiplions ensuite par

$$P^{\rho, n}(x) (1-x^2)^{\rho-\frac{1}{2}}$$

les deux membres de (6), puis intégrons de $x = -1$ à $x = +1$, il résulte, en vertu de (5) et § 28, (3) ce développement:

$$\left. \begin{aligned} A^{\rho, n}(\alpha\beta) = \frac{\beta^n}{\Gamma(\rho+n+1)} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s (\rho+n+2s) \cdot \frac{\Gamma(\nu+n+s)}{s!} \cdot \\ \cdot F(\nu+n+s, -s, \rho+n+1, \beta^2) \cdot A^{\nu, n+2s}(\alpha) \end{aligned} \right\} \tag{7}$$

qui est vrai pourvu que $|\alpha| < r$ et que β soit situé à l'intérieur de l'ellipse (3).

Posons particulièrement dans (7) $\beta = 1$, il résulte:

$$A^{\rho, n}(\alpha) = \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s (\rho+n+2s) \cdot \frac{\Gamma(\nu+n+s)}{\Gamma(\rho+n+s+1)} \cdot \binom{\rho-\nu}{s} \cdot A^{\nu, n+2s}(\alpha). \tag{8}$$

Cherchons ensuite dans les deux membres de (2) les coefficients de la puissance x^n, nous aurons cet autre développement:

$$\alpha^n = \frac{2^n}{n!\, a_n} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s (\nu+n+2s) \cdot \frac{\Gamma(\nu+n+s)}{s!} \cdot A^{\nu, n+2s}(\alpha) \tag{9}$$

qui est valable aussi pourvu que $|\alpha| < r$.

Il est bien remarquable, ce me semble, que les formules (7), (8) et (9) sont valables quelle que soit la série de puissances (1) que nous avons prise pour point de départ.

Considérons comme premier exemple la série § 24, (10); nous aurons

$$a_n = \frac{i^n}{n!}, \quad A^{\nu, n}(\alpha) = i^n \left(\frac{2}{x}\right)^{\nu} \cdot J^{\nu+n}(\alpha),$$

d'où ces trois formules très connues[1]):

[1]) Voir mon Handbuch der Zylinderfunktionen, pp. 275, 273; 1904.

$$\left(\frac{2}{ax}\right)^{\rho} J^{\rho}(ax) = \left(\frac{2}{x}\right)^{\nu} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(\nu+2s)\,\Gamma(\nu+s)}{s!\,\Gamma(\rho+s+1)} \cdot F(\nu+s,\ -s,\ \rho+1,\ a^2)\,J^{\nu+2s}(x) \quad (10)$$

$$J^{\rho}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\rho-\nu} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(\nu+2s)\,\Gamma(\nu+s)}{\Gamma(\rho+s+1)} \cdot \binom{\rho-\nu}{s} J^{\nu+2s}(x) \quad (11)$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(\nu+2s)\,\Gamma(\nu+s)}{s!} \cdot J^{\nu+2s}(x) \quad (12)$$

qui sont vraies pour des valeurs finies quelconques de x et de a.

Prenons encore comme point de départ la formule § 27, (5), puis mettons-y $1:a$ au lieu de y et σ au lieu de ρ, il résulte:

$$a_n = (-1)^n \binom{-\sigma}{n}, \quad A^{\nu, n}(a) = \frac{2^n a^{-\sigma}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\sigma)}\, Q^{\sigma-\nu,\, 2\nu-\sigma+n}\left(\frac{1}{a}\right),$$

ce qui donnera ces autres formules analogues aux précédentes:

$$\left.\begin{aligned} Q^{\sigma-\rho,\, 2\rho-\sigma}\left(\frac{1}{a\beta}\right) = \frac{2^{2\nu}\cdot\beta^{\sigma}}{\Gamma(\rho+1)} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s(\nu+2s) \cdot \frac{\Gamma(\nu+s)}{s!} \cdot \\ \cdot F(\nu+s,\ -s,\ s+1,\ \beta^2) \cdot Q^{\sigma-\nu,\, 2\nu-\sigma+2s}\left(\frac{1}{a}\right) \end{aligned}\right| \quad (13)$$

$$Q^{\sigma-\rho,\, 2\rho-\sigma}\left(\frac{1}{a}\right) = 2^{2\nu} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s(\nu+2s) \cdot \frac{\Gamma(\nu+s)}{s!} \binom{\rho-\nu}{s} \cdot Q^{\sigma-\nu,\, 2\nu-\sigma+2s}\left(\frac{1}{a}\right) \quad (14)$$

$$\sqrt{\pi}\,\Gamma(\sigma) \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^{\sigma} = 2^{2\nu+1} \cdot \sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s(\nu+2s) \cdot \frac{\Gamma(\nu+s)}{s!} \cdot Q^{\sigma-\nu,\, 2\nu-\sigma+2s}\left(\frac{1}{a}\right). \quad (15)$$

Or, il me semble que cette analogie entre la fonction cylindrique et la fonction métasphérique est très intéressante à constater.